سلسلة التمارين الثالثة الخاصة بمقياس إحصاء 1

التمرين رقم 1: ليكن لدينا التوزيع التكراري للبيانات المتصلة التالية:

$Classes$	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10
Fi	13	8	9	6	4

1. أحسب العزوم اللامركزية والعزوم المركزية ثم تأكد بطريقة أخرى من أن العزوم المركزية صحيحة؛
2. أحسب الرُبيع الأول، الثاني، والثالث ثم المنوال. قارن بين قيم الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال وماذا تستنتج؛
3. أحسب معامل الالتواء بالطريقة الدقيقة والطرق التقريبية، وماذا تستنتج؛
4. أحسب معامل التفرطح العزمي K. وماذا تستنتج.

التمرين رقم 2: البيانات التالية تمثل الدخل (X_i) والانفاق الاستهلاكي (Y_i) لعينة من ثمانية عائلات. الوحدة (1000دج)

$Famille$	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	49	46	45	48	43	42	47	48
Y_i	39	37	34	36	29	28	35	34

المطلوب: أحسب معامل الارتباط بين الدخل والاستهلاك وماذا تستنتج.

التمرين رقم 3: البيانات التالية تمثل تقدير مادتي الرياضيات (X_i) والاحصاء (Y_i) لعينة من سبعة طلبة جامعيين.

$Etudiant$	1	2	3	4	5	6	7
X_i	ضعيف	ممتاز	جيد	متوسط	جيد جدا	مقبول	ضعيف جدا
Y_i	ضعيف جدا	جيد	جيد جدا	مقبول	ممتاز	ضعيف	متوسط

المطلوب: أحسب معامل الارتباط بين تقدير مادتي الرياضيات والاحصاء وماذا تستنتج.

التمرين رقم 4: الجدول التالي يوضح تكلفة الاعلانات (X_i) وقيمة المبيعات (Y_i) لعينة من ستة مؤسسات. (الوحدة: 100000 دج)

$Entreprise$	1	2	3	4	5	6
X_i	5	11	4	5	3	2
Y_i	31	40	30	34	25	20

المطلوب: أوجد معادلة خط الانحدار البسيط لقيمة المبيعات بدلالة تكلفة الاعلانات، ثم ما هو تقدير قيمة المبيعات إذا كانت تكلفة الاعلانات تساوي 1,2 مليون دج؟

التمرين رقم 5: الجدول التالي يوضح سعر وكمية مجموعة من السلع $(A; B; C)$ بين سنتي 2012 و2015.

$Produit$		A	B	C
2012	$Prix\ (p_0)$	8	10	4
	$Quantité\ (q_0)$	14	12	18
2015	$Prix\ (p_1)$	12	20	16
	$Quantité\ (q_1)$	20	16	14

أحسب ما يلي:

1. التغير المطلق في سعـــــر السلعـــــة A؛
2. التغير النسبي في سعـــــر السلعـــــة A؛
3. الرقم القياسي البسيـــــط للسلعة A؛
4. الرقم القياســـي التجمـــيعي البسيـط؛
5. الرقم القياسي النسبي البسيط باستخدام الوسط الحسابي؛
6. الرقم القياسي النسبي البسيط باستخــــــدام المتوسط الهندسي؛
7. رقم "لاسبيـــــر" القياســـــــي، ما تعليقـك؛
8. رقم "بـــــاش" القياســـــي؛ ما تعليقك؛
9. الرقــــم القياســـــــي الأمثل، ما تعليقـــك؛
10. رقم "مــارشال-أدجورث" القياسي، مـا تعليقك.

الحل النموذجي لسلسلة التمارين الثالثة الخاصة بمقياس إحصاء 1

حل التمرين رقم 1: 1.1. حساب العزوم اللامركزية:

Classes	Fi	C_i	$Fi \times C_i$	C_i^2	$Fi \times C_i^2$	C_i^3	$Fi \times C_i^3$	C_i^4	$Fi \times C_i^4$
$0-2$	13	1	13	1	13	1	13	1	13
$2-4$	8	3	24	9	72	27	216	81	648
$4-6$	9	5	45	25	225	125	1125	625	5625
$6-8$	6	7	42	49	294	343	2058	2401	14406
$8-10$	4	9	36	81	324	729	2916	6561	26244
Σ	**40**	-	**160**	-	**928**	-	**6328**	-	**46936**

$$m_1 = \frac{\sum F_i C_i}{\sum F_i} = \bar{x} = \frac{160}{40} = \mathbf{4} \qquad m_2 = \frac{\sum F_i C_i^2}{\sum F_i} = \frac{928}{40} = \mathbf{23,2}$$

$$m_3 = \frac{\sum F_i C_i^3}{\sum F_i} = \frac{6328}{40} = \mathbf{158,2} \qquad m_4 = \frac{\sum F_i C_i^4}{\sum F_i} = \frac{46936}{40} = \mathbf{1173,4}$$

2.1. حساب العزوم المركزية:

Classes	Fi	Ci	$Ci-\bar{x}$	$Fi(Ci-\bar{x})$	$(Ci-\bar{x})^2$	$Fi(Ci-\bar{x})^2$	$(Ci-\bar{x})^3$	$Fi(Ci-\bar{x})^3$	$(Ci-\bar{x})^4$	$Fi(Ci-\bar{x})^4$
$0-2$	13	1	-3	-39	9	117	-27	-351	81	1053
$2-4$	8	3	-1	-8	1	8	-1	-8	1	8
$4-6$	9	5	1	9	1	9	1	9	1	9
$6-8$	6	7	3	18	9	54	27	162	81	486
$8-10$	4	9	5	20	25	100	125	500	625	2500
Σ	**40**	-	-	**0**	-	**288**	-	**312**	-	**4056**

$$\mu_1 = \frac{\sum Fi(Ci-\bar{x})}{\sum F_i} = \mathbf{0}$$

$$\mu_2 = \frac{\sum F_i (C_i-\bar{x})^2}{\sum F_i} = \frac{288}{40} = \mathbf{7,2} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{7{,}2} = \mathbf{2,68}$$

$$\mu_3 = \frac{\sum F_i (C_i-\bar{x})^3}{\sum F_i} = \frac{312}{40} = \mathbf{7,8}$$

$$\mu_4 = \frac{\sum F_i (C_i-\bar{x})^4}{\sum F_i} = \frac{4056}{40} = \mathbf{101,4}$$

3.1. التأكد من أن العزوم المركزية صحيحة بطريقة أخرى: يتم من خلال العلاقة بين العزوم اللامركزية والعزوم المركزية.

$$m_1 = 4 \qquad m_2 = 23{,}2 \qquad m_3 = 158{,}2 \qquad m_4 = 1173{,}4$$

$\boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{\mu_2} = m_2 - m_1^2 = 23{,}2 - (4)^2 = \mathbf{7,2}$

$\boldsymbol{\mu_3} = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = 158{,}2 - 3(23{,}2)(4) + 2(4)^3 = \mathbf{7,8}$

$\boldsymbol{\mu_4} = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4 = 1173{,}4 - 4(158{,}2)(4) + 6(23{,}2)(4)^2 - 3(4)^4 = \mathbf{101,4}$

2. حساب الرُبيع الأول، الثاني، والثالث ثم المنوال:

$Classes$	F_i	Fcc
$0-2$	13	0 $RQ_1 = 10$
$2-4$	8	13 $Rme = 20$
$4-6$	9	21 $RQ_3 = 30$
$6-8$	6	30
$8-10$	4	36
$\sum$	**40**	40

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times K = 0 + \frac{10-0}{13-0} \times 2 = \mathbf{1,54}$$

$$Q_2 = Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times K = 2 + \frac{20-13}{21-13} \times 2 = \mathbf{3,75}$$

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum F_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times K = 4 + \frac{30-21}{30-21} \times 2 = \mathbf{6}$$

$$Mo = L_0 + \frac{(F_0 - F_1)}{(F_0 - F_1) + (F_0 - F_2)} \times k = 0 + \frac{(13-0)}{(13-0) + (13-8)} \times 2 = \mathbf{1,44}$$

لدينا $\bar{X} = 4 > Me = 3,75 > Mo = 1,44$ ومنه نستنتج أن التوزيع التكراري موجب الالتواء يمتد أكثر نحو اليمين.

3. حساب معامل الالتواء بالطريقة الدقيقة والطرق التقريبية:

1.3 الطريقة الدقيقة: معامل فيشر للالتواء

$$\gamma_F = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{7,8}{(2,68)^3} = \frac{7,8}{19,25} = \mathbf{0,41}$$

2.3 الطرق التقريبية:

معامل بيرسون الأول للالتواء: $\gamma_1 = \frac{\bar{X}-Mo}{\sigma_x} = \frac{4-1,44}{2,68} = \mathbf{0,96}$

معامل بيرسون الثاني للالتواء: $\gamma_2 = \frac{3(\bar{X}-Me)}{\sigma_x} = \frac{3(4-3,75)}{2,68} = \mathbf{0,28}$

معامل يول للالتواء: $\gamma_3 = \frac{Q_3+Q_1-2Q_2}{Q_3-Q_1} = \frac{6+1,54-2(3,75)}{6-1,54} = \mathbf{0,009}$

بما أن إشارة معامل الالتواء موجبة –باختلاف طرق الحساب- هذا ما يؤكد أن التوزيع التكراري موجب الالتواء يمتد أكثر نحو اليمين، وهو ما قد استنتجناه سابقاً من خلال مقارنة قيم الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال.

4. حساب معامل التفرطح العزمي:

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = \frac{101,4}{(2,68)^4} = \frac{101,4}{51,59} = \mathbf{1,97}$$

بما أن $K < 3$ نستنتج أن التوزيع مفرطح القمة.

حل التمرين رقم 2:

لتطبيق صيغة معامل ارتباط بيرسون (حالة البيانات الكمية) يجب أولا حساب الوسط الحسابي لكل من X_i و Y_i ثم الانحرافات $X_i - \bar{X}$ و $Y_i - \bar{Y}$ ومربعاتهم وحاصل ضربهم كما في الجدول التالي:

Famille	$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{Y_i}$	$\boldsymbol{X_i - \bar{X}}$	$\boldsymbol{Y_i - \bar{Y}}$	$\boldsymbol{(X_i - \bar{X})^2}$	$\boldsymbol{(Y_i - \bar{Y})^2}$	$\boldsymbol{(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}$
1	49	39	3	5	9	25	15
2	46	37	0	3	0	9	0
3	45	34	-1	0	1	0	0
4	48	36	2	2	4	4	4
5	43	29	-3	-5	9	25	15
6	42	28	-4	-6	16	36	24
7	47	35	1	1	1	1	1
8	48	34	2	0	4	0	0
$\sum$	**368**	**272**	**0**	**0**	**44**	**100**	**59**

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{368}{8} = 46 \qquad \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{272}{8} = 34$$

$$r = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2 \times \sum(Y_i - \bar{Y})^2}} = \frac{59}{\sqrt{44 \times 100}} = \frac{59}{\sqrt{4400}} = \frac{59}{66,33} = \mathbf{0,89}$$

الاستنتاج: نستنتج أن هناك ارتباط طردي قوي بين المتغيرين.

حل التمرين رقم 3: بداية نرتب التقديرات ترتيبا تصاعديا: ضعيف جدا = 1؛ ضعيف = 2؛ متوسط = 3 ؛ مقبول = 4؛ جيد = 5؛ جيد جدا = 6؛ ممتاز = 7.

ولتطبيق صيغة معامل ارتباط سبيرمان للرتب (حالة البيانات النوعية الترتيبية) يجب أولا ترتيب تقدير المادتين ثم نقوم بحساب فروقات الرتب $d_i = Rang\ X_i - Rang\ Y_i$ ونقوم بتربيعها d_i^2 كما في الجدول التالي:

$Etudiant$	1	2	3	4	5	6	7
X_i	ضعيف	ممتاز	جيد	متوسط	جيد جدا	مقبول	ضعيف جدا
Y_i	ضعيف جدا	جيد	جيد جدا	مقبول	ممتاز	ضعيف	متوسط
$Rang\ X_i$	2	7	5	3	6	4	1
$Rang\ Y_i$	1	5	6	4	7	2	3
d_i	1	2	-1	-1	-1	2	-2
d_i^2	1	4	1	1	1	4	4

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 16}{7(49-1)} = 1 - \frac{96}{336} = 1 - 0,29 = \mathbf{0,71}$$

الاستنتاج: نستنتج أن هناك ارتباط طردي قوي بين المتغيرين.

حل التمرين رقم 4: تكتب معادلة الانحدار الخطي البسيط على الشكل التالي: $Y = a + bX$ ولحساب المَعلَمتين a و b نشكل الجدول التالي:

$Entreprise$	1	2	3	4	5	6	$\sum$
X_i	5	11	4	5	3	2	**30**
Y_i	31	40	30	34	25	20	**180**
$X_i \times Y_i$	155	440	120	170	75	40	**1000**
X_i^2	25	121	16	25	9	4	**200**
$X_i - \bar{X}$	0	6	-1	0	-2	-3	-
$Y_i - \bar{Y}$	1	10	0	4	-5	-10	-
$(X_i - \bar{X})^2$	0	36	1	0	4	9	**50**
$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$	0	60	0	0	10	30	**100**

1. تحديد قيمة الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{30}{6} = 5 \qquad \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{180}{6} = 30$$

2. تحديد قيمة المَعلمة b:

1.2 طريقة المربعات الصغرى:

$$b = \frac{n\sum(X_i \times Y_i) - \sum X \times \sum Y}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{6 \times 1000 - 30 \times 180}{6 \times 200 - 900} = \frac{600}{300} = \mathbf{2}$$

2.2 طريقة الانحرافات:

$$b = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{100}{50} = \mathbf{2}$$

3. تحديد قيمة المَعلمة a:

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} = 30 - 2 \times 5 = \mathbf{20}$$

ومنه معادلة خط الانحدار البسيط تكتب كما يلي:

$$\boldsymbol{Y = 20 + 2X}$$

إذا كانت تكلفة الاعلانات تساوي 1,2 مليون دج فإن:

$$Y = 20 + 2X \Leftrightarrow Y = 20 + 2(12) = \mathbf{44}$$

أي أن قيمة المبيعات المتوقعة تساوي 4,4 مليون دج.

حل التمرين رقم 5:

1. التغير المطلق في سعر السلعـــــة A:

$$p_1 - p_0 = 12 - 8 = \mathbf{4}$$

2. التغير النسبي في سعر السلعـــة A:

$$\frac{p_1 - p_0}{p_0} = \frac{12 - 8}{8} = \mathbf{0,5}$$

3. الرقم القياسي البسيط للسلعـة A:

$$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100 = \frac{12}{8} \times 100 = \mathbf{150}$$

4. الرقم القياسي التجميعي البسيـط:

$$I = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100 = \frac{12 + 20 + 16}{8 + 10 + 4} \times 100 = \frac{48}{22} \times 100 = \mathbf{218,18}$$

من أجل حساب بقية الأرقام القياسية نحتاج الى تشكيل الجدول التالي:

$Produit$		A	B	C	$\sum$
2012	$Prix\ (p_0)$	8	10	4	-
	$Quantité\ (q_0)$	14	12	18	-
2015	$Prix\ (p_1)$	12	20	16	-
	$Quantité\ (q_1)$	20	16	14	-
	$\frac{p_1}{p_0} \times 100$	150	200	400	**750**
	$p_0 q_0$	112	120	72	**304**
	$p_0 q_1$	160	160	56	**376**
	$p_1 q_0$	168	240	288	**696**
	$p_1 q_1$	240	320	224	**784**
	$q_0 + q_1$	34	28	32	**-**
	$p_0(q_0 + q_1)$	272	280	128	**680**
	$p_1(q_0 + q_1)$	408	560	512	**1480**

5. الرقم القياسي النسبي البسيط باستخدام الوسط الحسابي:

$$I = \frac{\sum\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)}{n} = \frac{750}{3} = \mathbf{250}$$

6. الرقم القياسي النسبي البسيط باستخدام الوسط الهندسي:

$$I = \sqrt[n]{\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)_1 \times \left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)_2 \times \dots \times \left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)_n} = \sqrt[3]{150 \times 200 \times 400} = \sqrt[3]{12000000} = \mathbf{228,94}$$

7. رقم "لاسبيـــــــر" القياســـــــي:

$$I = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{696}{304} \times 100 = \mathbf{228,95}$$

التعليق: حسب هذا الرقم فإن أسعار 2015 قد عرفت ارتفاعا قدره 128,95% مقارنة بقيمتها في سنة 2012.

8. رقم "بــــــاش" القياســــــي:

$$I = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100 = \frac{784}{376} \times 100 = \mathbf{208,51}$$

التعليق: حسب هذا الرقم فإن أسعار 2015 قد عرفت ارتفاعا قدره 108,51% مقارنة بقيمتها في سنة 2012.

9. الرقـــم القياســــــي الأمثل:

$$I = \sqrt{\text{رقم باش} \times \text{رقم لاسبير}} = \sqrt{228,95 \times 208,51} = \mathbf{218,49}$$

التعليق: حسب هذا الرقم فإن أسعار 2015 قد عرفت ارتفاعا قدره 118,49% مقارنة بقيمتها في سنة 2012.

10. رقم "مارشال-أدجورث" القياسي:

$$I = \frac{\sum p_1 (q_0 + q_1)}{\sum p_0 (q_0 + q_1)} \times 100 = \frac{1480}{680} \times 100 = \mathbf{217,65}$$

التعليق: حسب هذا الرقم فإن أسعار 2015 قد عرفت ارتفاعا قدره 117,65% مقارنة بقيمتها في سنة 2012.