المحور الثاني:

مبادئ العد (التحليل التوفيقي)

الهدف من التحليل التوفيقي هو تعلم حساب عدد العناصر في مجموعة محدودة، والدارس للتحليل التوفيقي عليه معرفة المبدأ الأساسي للعد، التبديلات، الترتيبات والتوفيقات.

1/ المبدأ الأساسي للعد:

ينص هذا المبدأ على أنه إذا أمكن القيام بتجربة أولى بـ N1 امكانية مختلفة وإذا أمكن القيام بتجربة ثانية بـ N2 امكانية مختلفة فيمكن القيام بالتجربتين معاً بعدد مساوي لـ $N1 \times N2$ طريقة، كما يمكن تعميم هذا المبدأ على أكثر من تجربتين.

مثال 1: في تجربتي رمي زهرة النرد وقطعة نقود ما هو عدد الثنائيات التي يمكن الحصول عليها؟

- عدد نتائج رمي زهرة النــــرد:

$$\text{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow N1 = 6$$

- عدد نتائج رمي قطعة النقود:

$$\text{B} = \{P, F\} \Rightarrow N2 = 2$$

وفقاً للمبدأ الأساسي للعد يكون لدينا $6 \times 2 = 12$ إمكانية مختلفة، ويمكن توضيح هذه النتائج كما يلي:

$$\Omega = \{(1, F), (2, F), (3, F), (4, F), (5, F), (6, F), (1, P), (2, P), (3, P), (4, P), (5, P), (6, P)\}$$

مثال 2: ليكن لدينا مجموعة الأرقام التالية: 0، 1، 2، 3، 4. كم عدد من ثلاثة أرقام يمكن تشكيله في الحالات التالية:

1. امكانية تكرار الرقم، 2. عدم امكانية تكرار الرقم، 3. رقم المئات يختلف عن 3 دون تكرار.

1. امكانية تكرار الرقم: الصفر لا يكون في رقم المئات، أي عدد امكانيات تشكيل المئات كل الأرقام ما عدا الصفر.

وفقاً للمبدأ الأساسي للعد يكون لدينا: عدد $4 \times 5 \times 5 = 100$

2. عدم امكانية تكرار الرقم: وفقاً للمبدأ الأساسي للعد يكون لدينا: عدد $4 \times 4 \times 3 = 48$

3. رقم المئات يختلف عن 3: لتشكيل المئات نستخدم الأرقام 1 أو 2 أو 4.

وفقاً للمبدأ الأساسي للعد يكون لدينا: عدد $3 \times 4 \times 3 = 36$

مثال 3: ليكن لدينا مجموعة الأرقام التالية: 0، 2، 3، 5. دون تكرار كم عدد من ثلاثة أرقام يمكن تشكيله في الحالات التالية:

1. العدد المشكل أقل من 400، 2. العدد المشكل فردي، 3. العدد المشكل زوجي.

1. العدد المشكل أقل من 400: يجب أن يكون رقم المئات أقل من 4 إما 2 أو 3، وفقاً للمبدأ الأساسي للعد يكون لدينا: عدد $2 \times 3 \times 2 = 12$، الأعداد هي: 203، 205، 230، 250، 235، 253، 302، 305، 320، 350، 325، 352.

2. العدد المشكل فردي: يجب أن يكون رقم الآحاد فردي إما 3 أو 5، منه وفقاً للمبدأ الأساسي للعد يكون لدينا: أعداد $2 \times 2 \times 2 = 8$، الأعداد هي: 503، 203، 523، 253، 205، 305، 235، 325.

3. العدد المشكل زوجي: يجب أن يكون رقم الآحاد زوجي: إذا كان رقم الآحاد صفر: أعداد $3 \times 2 \times 1 = 6$ إذا كان رقم الآحاد 2: أعداد $2 \times 2 \times 1 = 4$، ومنه عدد الأعداد الزوجية المشكلة هو: أعداد $6 + 4 = 10$، الأعداد هي: 320، 230، 520، 250، 530، 350، 302، 502، 352، 532.

ملاحظة: عدد الأعداد الفردية والزوجية المشكلة هو: عدد $8 + 10 = 18$، ويساوي أيضاً: عدد $3 \times 3 \times 2 = 18$

2/ التبديلات Permutations:

التبديلة هي عملية ترتيب جميع عناصر مجموعة . فعملية إعادة ترتيب عناصر مجموعة ما تسمى تبديلا. ونميز بين التبديلات دون تكرار، التبديلات بتكرار.

1.2/ التبديلات دون تكرار: نسمي تبديلة دون تكرار كل مجموعة مرتبة بعناصر **مختلفة**، وعدد التبديلات دون تكرار يرمز لها بالرمز P_n حيث: $\mathrm{P}_n = n!$

ملاحظة: تسمى $n!$ بـ n عاملي $(n\ Factoriel)$ حيث:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

شرط أن يكون n يختلف عن الصفر ونقبل أن $0! = 1$

مثال 4: بكم طريقة يمكن ترتيب أربعة كتب (1 رياضيات، 1 احصاء، 1 اقتصاد، 1 ادارة أعمال) في رف مكتبة؟ وبكم طريقة يمكن ترتيبها إذا كان كتاب الرياضيات وكتاب الاحصاء يوجدان جنبا إلى جنب؟

1. بما أننا بصدد ترتيب جميع الكتب نتكلم هنا عن التبديلة، وبما أنه لا يمكن وضع كتاب معين في مكانين مختلفين فالتبديلة تصبح دون تكرار، ومنه:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

.2. يُمكن اعتبار كتاب الرياضيات وكتاب الاحصاء ككتاب واحد ومنه نكون بصدد ترتيب ثلاثة كتب عوض أربعة، إذن:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

2.2/ التبديلات بتكرار: **(التبديلات مع وجود عناصر متشابهة)**

في بعض الحالات يُلاحظ وجود عناصر أو مفردات غير مختلفة في المجموعة، عدد التبديلات في هذه الحالة هو:

$$\widehat{\mathrm{P}}_n = \frac{n!}{\alpha! \times \beta! \times \dots \times \gamma!}$$

مثال 5: كم كلمة بمعنى أو دون معنى يمكن تشكيلها باستخدام حروف كلمة **Arrangement**.

بما أننا سنستخدم جميع الأحرف فيكون لدينا تبديلة وبما أن هناك حروف متشابهة فإن عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها هو:

$$\widehat{\mathrm{P}}_{11} = \frac{11!}{2! \times 2! \times 2! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{11 \times 10 \times \dots \times 2 \times 1}{16} = 2494800$$

3/ الترتيبات Arrangement:

الترتيبة هي مجموعة جزئية ذات r عنصر يتم اختيارها أو تشكيلها أو سحبها من مجموعة أخرى ذات n عنصر حيث $r < \mathrm{n}$ (لو يكون $r = \mathrm{n}$ الترتيبة تصبح تبديلة) وشرط الترتيب مهم، ونميز بين الترتيبات دون تكرار والترتيبات بتكرار.

1.3/ الترتيبات دون تكرار: نسمي ترتيبة دون تكرار إذا كانت عناصرها متمايزة (مختلفة) مثنى مثنى، ويرمز لعدد الترتيبات دون تكرار بالرمز: $\mathrm{A}_\mathrm{n}^\mathrm{r}$ ويمكن حساب عدد الترتيبات دون تكرار من خلال العلاقة التالية:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال 6: ما هو عدد الأعداد المكونة من رقمين دون تكرار والتي يتم اختيارها من المجموعة التالية:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

في تشكيل الأعداد الترتيب مهم وقد اخترنا جزء من كل والعملية تتم دون تكرار إذن عدد الأعداد هو:

$$\mathrm{A}_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

هذه الأعداد هي: 12، 13، 14، 21، 23، 24، 31، 32، 34، 41، 42، 43.

مثل 7: وعاء يحتوي على 20 كرة موزعة كما يلي: 12 حمراء و 8 بيضاء. نقوم بسحب 3 كرات على التوالي دون ارجاع.

1. بكم طريقة يُمكن إجراء هذا السحب؛
2. بكم طريقة يُمكن سحب الكرات بشرط أن تكون اثنتان باللون الأبيض؛
3. بكم طريقة يُمكن سحب الكرات بشرط أن تكون كرتان على الأقل باللون الأحمر.

الحل: في حالة السحب على التوالي الترتيب يكون مهم.

1. عدد طرق اجراء السحب:

$$A_{20}^{3}=\frac{20!}{(20-3)!}=\frac{20\times 19\times 18\times 17!}{17!}=6840 \text{ طريقة}$$

2. عدد طرق السحب بشرط أن تكون اثنتان باللون الأبيض:

$$BBR\cup BRB\cup RBB \Leftrightarrow 3(A_{8}^{2}\times A_{12}^{1})=3\times 56\times 12=2016 \text{ طريقة}$$

3. عدد طرق سحب الكرات بشرط أن تكون كرتان على الأقل باللون الأحمر:

$$BRR\cup RBR\cup RRB\cup RRR=3(A_{12}^{2}\times A_{8}^{1})+A_{12}^{3}=4488 \text{ طريقة}$$

مثال 8: يتكون فوج دراسي من 8 طلبة و4 طالبات، يُراد تشكيل لجنة مؤلفة من 3 أعضاء لتمثيل ذلك الفوج في الاجتماعات الادارية وقد حددت لهم المناصب التالية: رئيس لجنة، نائب أول ونائب ثاني.

1. كم لجنة يُمكن تشكيلها؛
2. كم لجنة يُمكن تشكيلها بحيث يكون فيها طالبة كرئيس لجنة وطالبان كنائب أول وثاني؛
3. كم لجنة يُمكن تشكيلها بحيث يكون فيها طالب كرئيس لجنة وطالبة على الأكثر للنيابة.

الحل: في حالة تشكيل اللجان مع تحديد المهام أو المناصب فان الترتيب يكون مهم.

1. عدد اللجان التي يُمكن تشكيلها:

$$A_{12}^{3}=\frac{12!}{(12-3)!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9!}{9!}=1320 \text{ لجنة}$$

2. عدد اللجان التي يُمكن تشكيلها بحيث يكون فيها طالبة كرئيس لجنة وطالبان كنائب أول وثاني:

$$A_{4}^{1}\times A_{8}^{2}=4\times 8\times 7=224 \text{ لجنة}$$

3. عدد اللجان التي يُمكن تشكيلها بحيث يكون فيها طالب كرئيس لجنة وطالبة على الأكثر للنيابة:

$$A_{8}^{1}\times A_{4}^{1}\times A_{7}^{1}+A_{8}^{1}\times A_{7}^{1}\times A_{4}^{1}+A_{8}^{1}\times A_{7}^{2}=224+224+336=784 \text{ لجنة}$$

مثال 9: ما هو عدد عناصر المجموعة التي يمكن تجزئتها إلى 72 مجموعة جزئية ذات عنصران في حالة ما إذا كان الترتيب مهم ومن دون تكرار، أي قم بحساب n في هذه الحالة :

$$A_{n}^{2}=90$$

الحل: ايجاد القيمة n في الحالة التالية:

$$A_{n}^{2}=\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=n(n-1)=n^{2}-n=90\Leftrightarrow n^{2}-n-90=0$$

$$\left(\text{معادلة من الدرجة الثانية}\right)\, ax^{2}+\mathrm{b}x+\mathrm{c}=0$$

لحل هذه المعادلة يجب حساب قيمة المميز Δ

$$\Delta=b^{2}-4\times a\times c=(-1)^{2}-4\times 1\times(-90)=361$$

قيمة المميز موجبة إذن المعادلة تقبل حلين (جذرين) هما:

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+19}{2} = 10 \ (\text{مقبول}) \\ n_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-19}{2} = -9 \ (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

ومنه

$$A_{10}^{2} = \frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90$$

2.3/ الترتيبات بتكرار: نسمي ترتيبة بتكرار إذا كانت عناصرها يُمكن تكرارها، ويرمز لعدد الترتيبات بتكرار بالرمز: $\widehat{\mathrm{A}}_n^r$ ويمكن حساب عدد الترتيبات بتكرار من خلال العلاقة التالية:

$$\widehat{\mathrm{A}}_n^r = n^r$$

مثال 10: بالعودة إلى المثال 6 أحسب عدد الأعداد التي يُمكن تشكيلها مع امكانية تكرار الرقم؟

في هذه الحالة نستخدم قانون الترتيبة بتكرار ومنه عدد الأعداد هو:

$$\widehat{\mathrm{A}}_4^2 = 4^2 = 16$$

هذه الأعداد هي:11، 12، 13، 14، 21، 22، 23، 24، 31، 32، 33، 34، 41، 42، 43، 44.

ملاحظة: الترتيب يكون مهم في الحالات التالية:

4/ التوفيقات Combinaisons:

تسمى أيضا في بعض المراجع بالتوليفات، إذن فالتوفيقة هي مجموعة جزئية ذات r عنصر يتم اختيارها أو تشكيلها أو سحبها من مجموعة أخرى ذات n عنصر حيث $r \leq \mathrm{n}$ وشرط الترتيب غير مهم، ونميز هنا أيضا بين التوفيقات دون تكرار والتوفيقات بتكرار.

1.4/ التوفيقات دون تكرار: نسمي توفيقة دون تكرار إذا كان يُمكن اختيار مجموعة ذات r عنصر من بين مجموعة أُخرى ذات n عنصر دون تكرار نفس العنصر، ويُرمز لعدد التوفيقات دون تكرار بالرمز $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{r}$ ويُمكن حساب عدد التوفيقات في هذه الحالة كما يلي:

$$\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{r} = \frac{\mathrm{A}_\mathrm{n}^\mathrm{r}}{r!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

خواص: $C_n^0 = 1 \qquad C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = n \qquad C_n^{n-1} = n$

مثل 11: بالعودة للمثال رقم 7. وعاء يحتوي على 20 كرة موزعة كما يلي: 12 حمراء و 8 بيضاء. نقوم بسحب 3 كرات معاً.

1. بكم طريقة يُمكن إجراء هذا السحب؛
2. بكم طريقة يُمكن سحب الكرات بشرط أن تكون اثنتان باللون الأبيض؛
3. بكم طريقة يُمكن سحب الكرات بشرط أن تكون كرتان على الأقل باللون الأحمر.

الحل: في حالة السحب معاً (في آن واحد) الترتيب يكون غير مهم.

1. عدد طرق اجراء السحب:

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{(20-3)!\,3!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17! \times 3 \times 2} = 1140 \ \text{طريقة}$$

2. عدد طرق السحب بشرط أن تكون اثنتان باللون الأبيض:

$$C_8^2 \times C_{12}^1 = \frac{8!}{(8-2)!\,2!} \times 12 = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2} \times 12 = 336 \ \text{طريقة}$$

3. عدد طرق سحب الكرات بشرط أن تكون كرتان على الأقل باللون الأحمر:

$$C_{12}^{2}\times C_{8}^{1}+C_{12}^{3}\times C_{8}^{0}=\frac{12!}{(12-2)!\,2!}\times 8+\frac{12!}{(12-3)!\,3!}=66\times 8+220=748 \text{ طريقة}$$

مثال 12: يتكون فوج دراسي من 8 طلبة و4 طالبات، يُراد تشكيل لجنة مؤلفة من 3 أعضاء لتمثيل ذلك الفوج في الاجتماعات الادارية.

1. كم لجنة يُمكن تشكيلها؛
2. كم لجنة بها طالبان على الأقل يمكن تشكيلها؛
3. كم لجنة بها طالبة على الأكثر يمكن تشكيلها.

الحل: في حالة تشكيل اللجان مع عدم تحديد المهام أو المناصب فان الترتيب يكون غير مهم.

1. عدد اللجان التي يُمكن تشكيلها:

$$C_{12}^{3}=\frac{12!}{(12-3)!\,3!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9!}{9!\times 3\times 2}=220 \text{ لجنة}$$

2. عدد اللجان التي بها طلبان على الأقل:

$$C_{8}^{2}\times C_{4}^{1}+C_{8}^{3}\times C_{4}^{0}=28\times 4+56=168 \text{ لجنة}$$

3. عدد اللجان التي بها طالبة على الأكثر:

$$C_{4}^{1}\times C_{8}^{2}+C_{4}^{0}\times C_{8}^{3}=336 \text{ لجنة}$$

2.4/ التوفيقات بتكرار: نسمي توفيقة بتكرار إذا كان يُمكن اختيار مجموعة ذات r عنصر من بين مجموعة أُخرى ذات n عنصر مع امكانية تكرار نفس العنصر، ويُرمز لعدد التوفيقات بتكرار بالرمز $\hat{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{r}}$ ويُمكن حساب عدد التوفيقات في هذه الحالة كما يلي:

$$\hat{C}_{n}^{r}=C_{n+r-1}^{r}=\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\times r!}$$

مثال 13: فرضاً أنه في مقهى يوجد شخصين يريدان الحصول على علبتي عصير من بين 5 أنواع موجودة في الثلاجة، كم طبق به علبتي عصير يمكن أن يُقدم لهما؟

بما انه يُمكن شرب نفس النوع فان عدد الأطباق التي يُمكن أن يقدم لهما هو:

$$\hat{C}_{5}^{2}=C_{5+2-1}^{2}=\frac{(5+2-1)!}{(5-1)!\times 2!}=\frac{6!}{4!\times 2!}=\frac{6\times 5\times 4!}{4!\times 2}=15$$