المحور الثالث:

الاحتمالات

قبل التطرق للاحتمالات يجب أولا التطرق لكل من التجربة العشوائية، الحدث وأنواعه.

I. التجربة والحدث:

1.التجربة العشوائية: هي تلك التجربة التي لا يمكن معرفة نتائجها مسبقا لكونها تعتمد على الصدفة أو الحظ، فإذا كررنا نفس التجربة ضمن نفس الشروط لا نحصل بالضرورة على نفس النتائج وهذا ما يعطيها صفة العشوائية، ويرمز لمجموعة النتائج بالرمز Ω. وكمثال على ذلك رمي زهرة النرد كل نتائجها معروفة ومنه: $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

2. الحدث و أنواعه: كل ظاهرة أو تجربة عشوائية تؤدي إلى تحقيق نتيجة نسميها حدث، ويرمز للحدث بالحروف اللاتينية الكبيرة، وفي كل تجربة عشوائية يمكن أن نوجه اهتمامنا إلى نتيجة واحدة من النتائج الممكنة للتجربة أو عدة نتائج لهذا فإننا نميز بين عدة أنواع من الأحداث.

1.2 الحدث البسيط: نقول عن حدث أنه بسيط إذا كان غير قابل للتجزئة، أي أنه يعبر عن عنصر واحد فقط من نتائج التجربة العشوائية مثل ظهور الرقم 3 عند رمي زهرة النرد أي أن: $A = \{3\}$

2.2 الحدث المركب: نقول عن حدث أنه مركب إذا كان يمكن تفكيكه وتجزئته إلى أحداث بسيطة مثل ظهور عدد زوجي عند رمي زهرة النرد أي أن: $A = \{2, 4, 6\}$

3.2 الحدث الأكيد: نقول عن حدث أنه أكيد إذا كان يحتوي على جميع الأحداث البسيطة الناتجة عن التجربة العشوائية مثل حدث ظهور الوجه أو الصورة عند رمي قطعة النقود.

4.2 الحدث المستحيل: نقول عن حدث أنه مستحيل إذا كان غير قابل للتحقق أي أنه لا يتضمن أي حدث بسيط مثل حدث ظهور الرقم 0 عند رمي زهرة النرد.

5.2 الحدث المتمم (العكسي): إذا كان A حدث من المجموعة Ω فإن متمم الحدث هو مجموعة العناصر التي لم يحققها الحدث A ويرمز له بالرمز $\overline{A}$ وعليه فإن: $A \cup \overline{A} = \Omega$ و $A \cap \overline{A} = \emptyset$

II. الاحتمالات: لفهم الاحتمالات يجب التطرق لكل من نظرية الاحتمال، قانون الجمع، قانون الضرب، الاحتمال الشرطي، الاحتمال الكلي، ونظرية بايز.

1. نظرية الاحتمال:

1.1 تعريف الاحتمال: الاحتمال هو عدد حقيقي محصور في المجال المغلق $[0 - 1]$ يشير الى امكانية وقوع حدث ما نتيجة تجربة عشوائية ويرمز له بالرمز $P(A)$.

2.1 حساب الاحتمال: في تجربة عشوائية إذا رمزنا للحدث بالرمز A فان احتمال وقوع هذا الحدث هو النسبة بين عدد الحالات الملائمة وعدد الحالات الممكنة (الكلية). ومنه فإن القانون العام للاحتمال هو:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$$

مثال1: في عيادة طبية لوحظ أنه من بين 500 عملية جراحية تم اجراؤها سابقا تم تسجيل نجاح 450 عملية، ما هو احتمال نجاح عملية تم اختيارها بطريقة عشوائية؟

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{450}{500} = 0{,}9 = 90\%$$

ومن بين أهم مبادئ حساب الاحتمالات ما يلي:

- احتمال وقوع الحدث A دوما محصور بين الصفر والواحد، أي أن: $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$؛
- إذا كان: $P(\mathrm{A}) = 0$ نقول أن احتمال وقوع الحدث A مستحيل؛
- إذا كان: $P(\mathrm{A}) = 1$ نقول أن احتمال وقوع الحدث A أكيد؛
- مجموع احتمالات الأحداث الأولية دوما يساوي الواحد: $P(\Omega) = 1$؛
- مجموع احتمال الحدث والحدث المتمم (العكسي) له يساوي الواحد: $P(\mathrm{A}) + P(\overline{\mathrm{A}}) = 1$ ومنه نستنتج أن: $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$
- إذا كان A و B حدثان متنافيان فإن: $\mathrm{P(A \cup B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)}$

مثال 2: بالعودة لمعطيات المثال 1 احسب احتمال فشل عملية جراحية تم اختيارها بطريقة عشوائية؟

احتمال الفشل هو حدث متمم لحدث النجاح، وبما أنه تم حساب احتمال النجاح سابقاً فإن احتمال الفشل هو:

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)} = 1 - 0{,}9 = 0.1 = 10\%$$

مثال 3: وعاء يحتوي على 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4. نسحب منه:

I. كرة واحدة. ما احتمال أن تكون: 1. تحمل رقماً زوجيا؟ 2. تحمل رقماً فرديا؟

II. كرتين معاً. ما احتمال أن تكونا: 1. تحملان رقمين زوجيين؟ 2. تحملان رقمين فرديين؟ 3. تشكلان عددا زوجيا؟

III. كرتين على التوالي دون ارجاع، ما احتمال أن: 1. يكون مجموعهما يساوي 5؟ 2. تشكلان عددا أكبر من 40؟

IV. كرتين على التوالي مع الارجاع: ما احتمال أن: 1. تشكلان عددا فرديا يقل عن 40؟ 2. مجموع الرقمين الظاهرين زوجي؟

الحل: I. نسحب منه كرة واحدة. احتمال سحب كرة:

1. تحمل رقماً زوجيا: نفرض أن A حدث سحب كرة تحمل رقماً زوجياً

$$P(\mathrm{A}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \mathbf{0,5}$$

2. تحمل رقماً فرديا: حدث سحب رقماً فرديا هو حدث متمم (عكسي) لسحب رقماً زوجياً.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}5 = \mathbf{0,5}$$

II. نسحب منه كرتين معاً. احتمال أن: (السحب معاً معناه الترتيب غير مهم)

1. تحملان رقمين زوجيين: نفرض أن B هو حدث سحب كرتان تحملان رقمان زوجيان:

$$P(B) = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6} = \mathbf{0,17}$$

2. تحملان رقمين فرديين: نفرض أن C هو حدث سحب كرتان تحملان رقمان فرديان: (الحدثان B و C ليسا متتامان)

$$P(C) = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6} = \mathbf{0,17}$$

3. تشكلان عددا زوجيا: عند تشكيل الأعداد الترتيب مهم رغم أن السحب معا. نفرض أن D هو حدث تشكيل عدد زوجي.

$$P(D) = \frac{A_2^1 \times A_3^1}{A_4^2} = \frac{6}{12} = \mathbf{0,50}$$

III. نسحب منه كرتين على التوالي دون ارجاع: 1. احتمال سحب كرتين مجموعهما يساوي 5: الحدث E

$$E = \{(1,4);\ (4,1);\ (2,3);\ (3,2)\} \Longrightarrow P(E) = \frac{4}{A_4^2} = \frac{4}{12} = \mathbf{0,33}$$

2. احتمال سحب كرتين تشكلان عددا أكبر من 40: الحدث F

$$P(F) = \frac{A_1^1 \times A_3^1}{A_4^2} = \frac{3}{12} = \mathbf{0,25}$$

IV. نسحب منه كرتين على التوالي مع الارجاع:

1. احتمال سحب كرتين تشكلان عددا فرديا يقل عن 40: الحدث G

$$P(G) = \frac{\hat{A}_3^1 \times \hat{A}_2^1}{\hat{A}_4^2} = \frac{3 \times 2}{4^2} = \frac{6}{16} = \mathbf{0,375}$$

2. احتمال سحب كرتين تحملان رقمان مجموعهما زوجي: عدد مجموع رقميه زوجي معناه الآحاد فردي والعشرات فردي أو الآحاد زوجي والعشرات زوجي. الحدث H

$$P(H) = \frac{\hat{A}_2^1 \times \hat{A}_2^1 + \hat{A}_2^1 \times \hat{A}_2^1}{\hat{A}_4^2} = \frac{2 \times 2 + 2 \times 2}{4^2} = \frac{8}{16} = \mathbf{0,5}$$

2. قانون الجمع:

قانون الجمع يُقصد به الاتحاد في المجموعات (∪)، أي حساب احتمال وقوع الحدث A أو الحدث B في حالة الاهتمام بحدثين. ونميز هنا بين الأحداث المتنافية والأحداث غير المتنافية.

1.2 الأحداث المتنافية: نقول أن A و B حدثان متنافيان إذا كانت مجموعة التقاطع بينهما خالية أي لا يوجد عناصر مشتركة بينهما، ومنه فاحتمال وقوع A أو B هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال 4: صندوق يوجد به 20 بطاقة مرقمة من 1 إلى 20. نقوم بسحب بطاقة بطريقة عشوائية ما احتمال الحصول على بطاقة بها رقم يقبل القسمة على 5 أو رقم يقبل القسمة على 7؟

ليكن لدينا: A حدث سحب بطاقة بها رقم يقبل القسمة على 5 و B حدث سحب بطاقة بها رقم يقبل القسمة على 7.

$$A = \{5, 10, 15, 20\}$$
$$B = \{7, 14\}$$

بما أن الحدثين متنافيين (مجموعة التقاطع هي مجموعة خالية) فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{20} + \frac{2}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

2.2 الأحداث غير المتنافية: نقول أن A و B حدثان غير متنافيان إذا كانت مجموعة التقاطع بينهما غير خالية أي يوجد عناصر مشتركة بينهما، في هذه الحالة احتمال وقوع A أو B هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 5: يقوم شخص بإلقاء قطعة نرد، فما احتمال ظهور رقم فردي أو رقم يقبل القسمة على 3؟

ليكن لدينا: $A = \{1, 3, 5\}$ حدث ظهور رقم فردي و$B = \{3, 6\}$ حدث ظهور رقم يقبل القسمة على 3، نلاحظ ان الحدثان غير متنافيان (يشتركان في العدد 3) أي أن $A \cap B = 3$، ومنه احتمال وقوع A أو B هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = 0{,}67$$

لو لم نقم بانقاص التقاطع من المجموع لحسبنا العدد 3 مرتين؛ مرة كعدد فردي وأخرى كعدد يقبل القسمة على 3 وهذا خطأ.

ملاحظة: قانون الجمع في حالة ثلاثة أحداث هو:

حالة الأحداث متنافية:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

حالة الأحداث غير المتنافية:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

3. قانون الضرب:

قانون الضرب يُقصد به التقاطع في المجموعات ($\cap$)، أي حساب احتمال وقوع الحدث A والحدث B في حالة الاهتمام بحدثين. ونميز هنا بين الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة.

1.3 الأحداث المستقلة: نقول أن A و B حدثان مستقلان إذا كان وقوع أحدهما ليس مشروط بوقوع الآخر واحتمال وقوع أحد الحدثين لا يتأثر باحتمال وقوع الآخر، ومنه فاحتمال وقوع A و B في هذه الحالة هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال 6: شخص يقوم بإطلاق رميتين متتاليتين على هدف معين، حيث احتمال أن يصيب في الرمية الأولى هو $0,5$ واحتمال أن يصيب في الرمية الثانية هو $0,6$. ما احتمال إصابة الرمية الأولى وإصابة الرمية الثانية؟

ليكن لدينا الحدثين: B_1 إصابة الرمية الأولى وB_2 إصابة الرمية الثانية، بما أن الحدثين مستقلين، فإن:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2) = 0,50 \times 0,60 = 0,30$$

2.3 الأحداث غير المستقلة: نقول أن A و B حدثان غير مستقلان إذا كان وقوع أحدهما مشروط بوقوع الآخر واحتمال وقوع أحد الحدثين يتأثر باحتمال وقوع الآخر ، ومنه فاحتمال وقوع A و B في هذه الحالة هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

الاشارة $(/)$ تُقرأ علماً، وتقرأ العبارة: $P(B/A)$ احتمال وقوع الحدث B علماً أن الحدث A محقق.

مثال 7: صندوق به 10 مصابيح كهربائية منها 7 صالحة للإضاءة و3 غير صالحة، نسحب من الصندوق بطريقة عشوائية مصباحين على التوالي دون إرجاع المصباح المسحوب للصندوق. ما احتمال أن يكون المصباحين صالحين للإضاءة؟

ليكن لدينا الحدثين: A_1 المصباح الأول صالح للإضاءة و A_2 المصباح الثاني صالح للإضاءة، ومنه احتمال أن يكون يكون المصباحين صالحين للإضاءة هو:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = 0,47$$

4. الاحتمال الشرطي:

الاحتمال الشرطي هو احتمال وقوع حدث ما مع العلم بوقوع حدث آخر، ليكن لدينا الحدثان A و B حيث $P(A) \neq 0$ نرمز لاحتمال وقوع الحدث B علماً A بالرمز $P(\quad /A)$ ويُحسب الاحتمال الشرطي بالعلاقة التالية:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال 8: عند رمي زهرة نرد، ما هو احتمال الحصول على العدد 6 علماً أن العدد الذي ظهر زوجي؟ ليكن لدينا: A حدث ظهور عدد زوجي و B حدث ظهور العدد 6. $A \cap B = \{6\}$ $B = \{6\}$ $A = \{2, 4, 6\}$ ومنه فإن احتمال الحصول على العدد 6 علماً أن العدد الذي ظهر زوجي هو:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} = 0,33$$

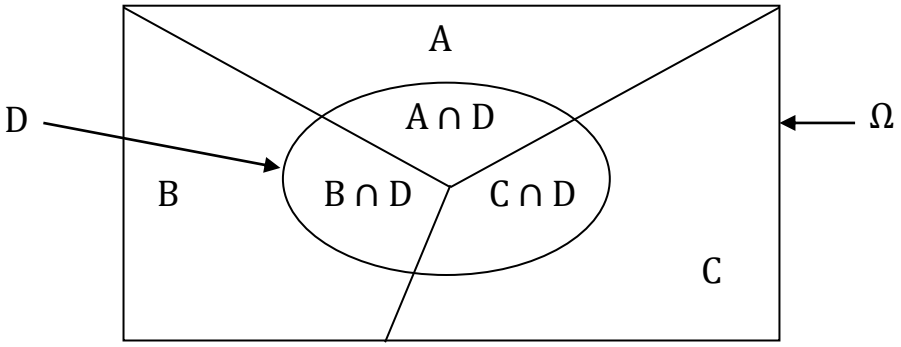
5. الاحتمال الكلي

قبل التطرق إلى مفهوم وقانون الاحتمال الكلي لا بد من معرفة ماذا يُقصد بالجملة التامة (الكاملة) أو كما تسمى أيضاً بالتجزئة للمجموعة الكلية Ω.

تعريف الجملة التامة: ليكن لدينا $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ متتالية من الأحداث، نقول عن هذه الأحداث أنها تُشكل جملة تامة (تجزئة للمجموعة Ω) إذا تحقق ما يلي:

- $\forall\, i \in \aleph, A_i \neq \emptyset \Leftrightarrow P(A_i) \neq 0$ جميع الأحداث غير خالية
- $\forall\, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow P(A_i \cap A_j) = 0$ جميع الأحداث متنافية مثنى مثنى
- $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ اتحاد الأحداث يعطينا المجموعة الكلية

الآن من أجل شرح معنى الاحتمال الكلي نفرض أنه لدينا ثلاثة أحداث A, B, C تُشكل جملة تامة (تجزئة للمجموعة Ω) ولدينا الحدث D لا يتحقق إلا بتحقق أحد الأحداث الجزئية الثلاثة السابقة كما هو موضح في الشكل التالي:



نلاحظ أن الأحداث $A \cap D, B \cap D, C \cap D$ هي أحداث متنافية مثنى مثنى ومنه حسب قانون الجمع فإن:

$$P(D) = P[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)] = P(A \cap D) + P(B \cap D) + (C \cap D)$$
$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)$$

تعميم قانون الاحتمال الكلي: ليكن لدينا الأحداث التالية: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ والتي تمثل جملة تامة وليكن لدينا الحدث B الذي لا يتحقق إلا بتحقق أجزاء الجملة التامة، ومنه فإن:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P\left(B/A_i\right)$$

مثال 9: ليكن لدينا ثلاثة صناديق متماثلة الأول فيه 5 كرات بيضاء و3سوداء، الثاني فيه 8بيضاء و4 سوداء والثالث فيه 6 بيضاء و2 سوداء. نختار صندوق بطريقة عشوائية ثم نسحب منه كرتين على التوالي دون ارجاع. أحسب احتمال أن تكونا الكرتان المسحوبتان سوداوتان؟

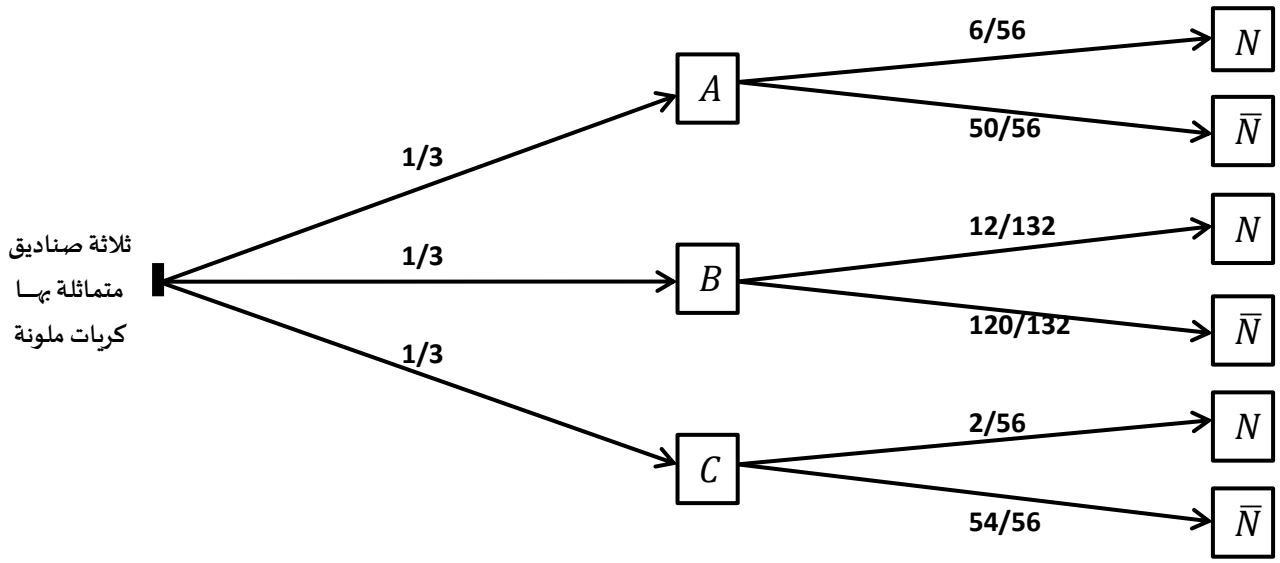
نفرض أن لدينا الأحداث التالية: A اختيار الصندوق الأول، B اختيار الصندوق الثاني، C اختيار الصندوق الثالث، N الكرتان المسحوبتان سوداوتان.

تكتب المعطيات كما يلي:

$$P(A) = \frac{1}{3} \qquad P(N/A) = \frac{A_3^2}{A_8^2} = \frac{6}{56}$$
$$P(B) = \frac{1}{3} \qquad P(N/B) = \frac{A_4^2}{A_{12}^2} = \frac{12}{132}$$
$$P(C) = \frac{1}{3} \qquad P(N/C) = \frac{A_2^2}{A_8^2} = \frac{2}{56}$$

المطلوب: حساب احتمال أن تكونا الكرتين المسحوبتين سوداويتين أي حساب $P(N)$

يُمكن ترجمة معطيات هذا التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية:



بما أن الأحداث A, B, C تشكل جملة تامة والحدث N لا يتحقق إلا بتحقق الأحداث السابقة، ومنه باستخدام قانون الاحتمال الكلي نجد:

$$\mathrm{P}(N) = P(A)P(N/A) + P(B)P(N/B) + P(C)P(N/C) = \frac{1}{3}\times\frac{6}{56} + \frac{1}{3}\times\frac{12}{132} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{56}$$
$$= \frac{1}{28} + \frac{1}{33} + \frac{1}{84} = 0{,}0779$$

6. نظرية بايز (دستور بايز) Théorème de Bayes:

تعتمد هذه النظرية على مختلف القوانين السابقة، وهي تعالج كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لأحداث متنافية تشكل جملة تامة بالنسبة للحدث الذي لا يتحقق إلا بتحققهم.

ليكن لدينا ثلاثة أحداث A, B, C تُشكل جملة تامة (تجزئة للمجموعة Ω) ولدينا الحدث D لا يتحقق إلا بتحقق أحد الأحداث الجزئية الثلاثة السابقة، ونريد أن نحسب الاحتمالات الشرطية التالية:

$$P(A/D)?\quad P(B/D)?\quad P(C/D)?$$

نأخذ مثلاً الحالة الأولى: $P(A/D)$ وفقاً لقانون الضرب (تقاطع الأحداث غير المستقلة) لدينا:

$$P(A \cap D) = P(A)P(D/A) = P(D)P(A/D)$$
$$\Rightarrow P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}$$

إذن:

$$P(A/D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}$$

وتسمى بنظرية بايز

تعميم نظرية بايز: لدينا الأحداث التالية: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ والتي تمثل جملة تامة وليكن لدينا الحدث B الذي لا يتحقق إلا بتحقق أجزاء الجملة التامة، ومنه فإن:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

مثال 10: مصنع يحتوي على ثلاثة آلات، تنتج الأولى 0,4 من الانتاج وتنتج الثانية 0,3 والثالثة 0,3، فإذا كان احتمال التالف من انتاج الآلة الأولى يساوي 0,03 ومن انتاج الثانية 0,02 ومن انتاج الثالثة 0,04. أخذنا عنصراً واحدا بطريقة عشوائية من انتاج هذا المصنع فوجدناه تالفاً.

1. ما احتمال أنه صنع بواسطة الآلة الأولى؟
2. ما احتمال أنه صنع بواسطة الآلة الثانية؟

نفرض أن لدينا الأحداث التالية: A العنصر من انتاج الآلة الأولى، B العنصر من انتاج الآلة الثانية، C العنصر من انتاج الآلة الثالثة، E العنصر تالف.

تكتب المعطيات كما يلي:

$$P(A) = 0{,}4 \qquad P(E/A) = 0{,}03$$
$$\mathrm{P}(B) = 0{,}3 \qquad P(E/B) = 0{,}02$$
$$\mathrm{P}(C) = 0{,}3 \qquad P(E/C) = 0{,}04$$

1. احتمال أن يكون العنصر من انتاج الآلة الأولى علماً أنه تالف: بتطبيق نظرية بايز

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)P(E/A)}{P(A)P(E/A) + P(A)P(E/A) + P(A)P(E/A)}$$

$$P(A/E) = \frac{0{,}4 \times 0{,}03}{0{,}4 \times 0{,}03 + 0{,}3 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}04} = \frac{0{,}012}{0{,}030} = 0{,}4$$

2. احتمال أن يكون العنصر من انتاج الآلة الثانية علماً أنه تالف: بتطبيق نفس الطريقة

$$P(B/E) = \frac{0{,}3 \times 0{,}02}{0{,}030} = \frac{0{,}06}{0{,}030} = 0{,}2$$