Université 08Mai 1945 Guelma
1 Licence Sciences Alimentaires (Procédés agroalimentaires) (1 COFFEE)
STATISTIQUES APPLIQUEES

Corrigé-type de Série N°3 de Statistiques Appliques

(Probabilités)

Exercice 1

Dans un groupe de 15 donneurs de sang, on trouve :

6 du groupe $\mathbf{A^+}$ ، 3 du groupe $\mathbf{O^-}$ ، 2 du groupe $\mathbf{B^-}$ ، 4 du groupe $\mathbf{AB^+}$

En guise de récompense la direction de l'hôpital prend au hasard 3 donneurs pour leur offrir un séjour à la Mecque (Omra). Calculer les probabilités des événements suivants :

1. Les trois donneurs appartiennent au même groupe ?
2. Parmi les trois donneurs il y a au moins 1 du groupe $\mathbf{B^-}$?
3. Les donneurs pris au hasard appartiennent aux trois groupes différents ?

Solution

Le nombre de cas possibles $C_{15}^3 = 455$ cas différents.

1. Nombre de cas favorables :

   On peut avoir 3 donneurs appartenant au même groupe de la manière suivante :

   $[\{3 \text{ de } \mathbf{A^+}\} \cup \{3 \text{ de } \mathbf{O^-}\} \cup \{3 \text{ de } \mathbf{AB^+}\}] = [C_6^3 + C_3^3 + C_4^3] = 20 + 1 + 4 = 25$ cas différents.

   D'où la probabilité cherchée $= \frac{25}{455} = 5.494505495\ \% \cong 5.49\ \%$

2. Nombre de cas favorables :

   On peut avoir au moins un donneur du groupe $\mathbf{B^-}$ de la façon suivante :

   $[\{1 \text{ donneur de } \mathbf{B^-} \text{ et 2 donneurs des autres groupes}\} \cup \{2 \text{ donneurs de } \mathbf{B^-} \text{ et 1 donneur des autres groupes}\}] = C_2^1 * C_{13}^2 + C_2^2 * C_{13}^1 = 2 * 78 + 1 * 13 = 169$ cas différents.

   D'où la probabilité cherchée $= \frac{169}{455} = 37.1428571\ \% \cong 37.14\ \%$

3. Nombre de cas favorables dans le cas où chaque donneur provient d'un groupe différent :

   $C_6^1 * C_2^1 * C_4^1 + C_6^1 * C_2^1 * C_3^1 + C_2^1 * C_4^1 * C_3^1 + C_4^1 * C_3^1 * C_6^1 = 180$ Cas différents.

   D'où la probabilité cherchée : $\frac{180}{455} = 39.5604395\ \% \cong 39.56\ \%$

Exercice 2

On place dans une boite 20 gélules d'un médicament de mêmes dimensions mais de couleurs différentes ; 12 sont jaunes et 8 vertes.

On tire successivement 6 gélules ; chaque gélule tirée est remise dans la boite après qu'on a examiné sa couleur. Calculer la probabilité :

1. D'avoir tiré 4 gélules jaunes et 2 gélules vertes dans cet ordre.
2. D'avoir tiré 6 gélules vertes.
3. Que les 6 gélules ne soient pas toutes de même couleur.

Solution

C'est un tirage successif (l'une après l'autre) avec remise (non exhaustif) de 6 gélules d'un médicament d'une boîte contenant 20 gélules ; c'est donc un arrangement avec répétition dont la formule est $R_n^p = R_{20}^6 = 20^6$ cas possibles.

Les lettres J et V désignent les couleurs jaune et verte et les indices 1 ; 2 ; 3… sont les numéros de tirage des gélules de la boîte, alors on a : P(J) = $\frac{12}{20}$ = 0.6 et P(V) = $\frac{8}{20}$ = 0.4

a) Probabilité d'avoir 4 gélules jaunes et 2 gélules vertes : P (A) = $\frac{nb\ de\ cas\ favorables\ de\ A}{nb\ de\ cas\ possibles}$

P ({4J + 2V}) = $\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{12^4 8^2}{20^6}$ = 0.020736 ≅ 2.07 %

Autre méthode : Avec le théorème des probabilités composées $P(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap V_5 \cap V_6) = [P(J_1)P(J_2 | J_1)P(J_3 | J_1 \cap J_2)P(J_4 | J_1 \cap J_2 \cap J_3)] * [P(V_5 | J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4)P(V_6 | J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap V_5)]$ et avec l'indépendance des évènements $\{P(J_2 | J_1) = P(J_2), P(J_3 | J_1 \cap J_2) = P(J_3), \ldots\}$, c'est $= [P(J_1)P(J_2)P(J_3)P(J_4)] * [P(V_5)P(V_6)] = [P(J)P(J)P(J)P(J)] * [P(V)P(V)] = (0.6)^4 * (0.4)^2$ = 0.020736 ≅ 2.07 %

b) Probabilité de 6 gélules vertes P (6V) = $\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{8^6}{20^6} = (0.4)^6$ ≅ 0.41%

Autre méthode : Avec le théorème des probabilités composées $P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5 \cap V_6) = [P(V_1)P(V_2 | V_1)P(V_3 | V_1 \cap V_2)P(V_4 | V_1 \cap V_2 \cap V_3) P(V_5 | V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4)P(V_6 | V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)]$ et avec l'indépendance de ces évènements $\{P(V_2 | V_1) = P(V_2), P(V_3 | V_1 \cap V_2) = P(V_3), \ldots\} = [P(V_1)P(V_2)P(V_3)P(V_4)] * [P(V_5)P(V_6)]$, c'est $= P(V)P(V)P(V)P(V)P(V)P(V) = [P(V)]^6 = (0.4)^6$ = 0.004096 ≅ 0.41 %

c) Probabilité qu'elles ne soient pas toutes de même couleur = ?

On procède par <u>*l'évènement complémentaire*</u> ; probabilité qu'elles soient toutes de même couleur c'est-à-dire ou bien jaunes ou bien vertes ; P (6J ou 6V) = P(6J) + P(6V).

La probabilité que les 6 gélules soient vertes calculée en b, P(6V) = $(0.4)^6$ = 0.004096 La probabilité que les 6 gélules soient jaunes sera calculée comme en b, P(6J) = $(0.6)^6$ = 0.046656 ⇒ Probabilité (6 de même couleur) = $P[(6J) \cup (6V)]$ = P(6J) + P(6V) = 0.050752

Probabilité (6 de couleur différente) = 1 – Probabilité (6 de même couleur) = 1 – 0.050752 = 0.949248 d'où la probabilité cherchée = 0.949248 ≅ 95 %.

Il y a une 2ème *Méthode* pour calculer la probabilité d'avoir 6 gélules de couleur différente ; cette méthode est la ***loi binomiale*** B (n = 6 ; p = 0.6**)** à être étudiée ultérieurement.

<u>Exercice 3</u>

La probabilité pour un individu d'être albinos est de 0,002.

1) Soit Y la variable aléatoire, nombre d'albinos dans un groupe de 5 000 individus :
   - Quelle loi suit Y ? Justifier.
   - Par quelle loi peut-on l'approcher ?
   - Calculer <u>par deux méthodes</u> les probabilités suivantes : P (Y = 8), P (Y = 13) ; ensuite P (Y = 20), P (30 < Y < 40) et P (Y = 30).
2) Soit X la variable aléatoire, nombre d'albinos dans un groupe de 1000 individus :
   - Quelle loi suit X ? Justifier.
   - Par quelle loi peut-on approcher la probabilité de X ? En déduire P (X = 0) et P (X = 1).

Solution

Y : variable aléatoire nombre (entier) d'albinos dans un groupe de 5 000 individus

Y $\sim$ B (5 000 ; 0.002) avec P (Y = k) = $C_n^k\, p^k q^{n-k}$

Conditions de validité :

- La répétition
- L'alternance
- L'indépendance.

Les conditions d'approximation :

- $n \geq 30$
- n p = 5 000 $*$ 0.002 = 10 > 5
- n q = 5 000 $*$ 0.998 = 4 990 > 5

Alors $Y \approx$ U tel que : U $\sim N$ (10 ; $\sqrt{9.98}$) et U $\to Z = \frac{U-10}{\sqrt{9.98}}$ sachant que $Z \sim N\,(0\,;\,1)$

PARTIE UNE :

Calcul des différentes probabilités (par approximation et par la binomiale)

1) P (Y = 8) = P (8 – 0.5 < U < 8 + 0.5) = P (7.5 < U < 8.5) = $P\left(\frac{7.5-10}{\sqrt{9.98}} < Z < \frac{8.5-10}{\sqrt{9.98}}\right)$ =

   P (– 0.79 < Z < – 0.47) = Π(0.79) – Π(0.47) = 0.7852 − 0.6808 = **10.44 %**

   P (Y = 8) = $C_n^k\, p^k q^{n-k} = C_{5000}^8\ 0.002^8 * 0.998^{4992}$ = **11.26 %**

2) P (7 < Y < 12) = P (8 ≤ Y ≤ 11) = P (8 – 0.5 < U < 11 + 0.5) = P (7.5 < U < 11.5) $\Rightarrow$

   $P\left(\frac{7.5-10}{\sqrt{9.98}} < Z < \frac{11.5-10}{\sqrt{9.98}}\right)$ = P (– 0.79 < Z < 0.47) = Π(0.47) – [1 – Π(0.79)] =

   Π(0.47) –1 + Π(0.79) = 0.6808 – 1 + 0.7852 = **46.60 %**

3) P (Y = 13) = P (13 – 0.5 ≤ U ≤ 13 + 0.5) = P (12.5 ≤ U ≤ 13.5) = $P\left(\frac{12.5-10}{\sqrt{9.98}} \leq Z \leq \frac{13.5-10}{\sqrt{9.98}}\right)$ =

   P (0.79 < Z < 1.11) = Π(1.11) – Π(0.79) = 0.8665 – 0.7852 = **8.13 %**

   P (Y = 13) = $C_n^k\, p^k q^{n-k} = C_{5000}^{13}\ 0.002^{13} * 0.998^{4987}$ = **7. 29 %**

Ensuite calcul des autres probabilités

1) P (Y = 20) = P (20 – 0.5 ≤ U ≤ 20 + 0.5) = P (19.5 ≤ U ≤ 20.5) = $P\left(\frac{19.5-10}{\sqrt{9.98}} \leq Z \leq \frac{20.5-10}{\sqrt{9.98}}\right)$ =

   P (3.01 < Z < 3.32) = Π(3.32) – Π(3.01) = 0.999550 – 0.998693 = **0.0856 %**

2) P (30 < Y < 40) = P (31 ≤ Y ≤ 39) = P (31 – 0.5 ≤ U ≤ 39 + 0.5) = P (30.5 ≤ U ≤ 39.5) =

   $P\left(\frac{30.5-10}{\sqrt{9.98}} \leq Z \leq \frac{39.5-10}{\sqrt{9.98}}\right)$ = P (6.49 < Z < 9.34) = Π(9.34) – Π(6.49)] = $4.3 * 10^{-11}$ ≈ **0 %**

Résultat obtenu par une application d'un mobile ou d'un logiciel installé dans un ordinateur.

P (30 < Y < 40) = P (31 ≤ Y ≤ 39) = $\sum_{k=31}^{39} C_n^k\, p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{39} C_n^k\, p^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^{31} C_n^k\, p^k q^{n-k} = \sum_{31}^{39} C_{5000}^k\ 0.002^k * 0.998^{5000-k} = \sum_{0}^{39} C_{5000}^k\ 0.002^k * 0.998^{5000-k} - \sum_{0}^{31} C_{5000}^k\ 0.002^k * 0.998^{5000-k} \approx 1 - 1 \approx$ **0 %**

Résultat obtenu par une application d'un mobile ou d'un logiciel installé dans un ordinateur.

3) P (Y = 30) = P (30 – 0.5 < U < 30 + 0.5) = P (29.5 < U < 31.5) = P ($\frac{29.5-10}{\sqrt{9.98}}$ < Z < $\frac{31.5-10}{\sqrt{9.98}}$) = P (6.17 < Z < 6.49) = $\Pi(6.49) - \Pi(6.17) = 3 * 10^{-10} \approx$ **0 %**

PARTIE DEUX :

X : variable aléatoire nombre (entier) d'albinos dans un groupe de 1 000 individus

X ~ B (1 000 ; 0.002) avec P (Y = k) = $C_n^k\, p^k q^{n-k}$

Calcul de probabilités par la loi binomiale

P (X = 0) = $C_n^k\, p^k q^{n-k}$ = C_{1000}^0 $0.002^0 * 0.998^{1000}$ = **13.51 %**

et P (X = 1) = $C_n^k\, p^k q^{n-k}$ = C_{1000}^1 $0.002^1 * 0.998^{999}$ = **27.07 %**

Calcul de probabilités par la loi de Poisson qui approxime la loi binomiale

Les conditions d'approximation de la binomiale par la loi de Poisson :

- n = 1 000 ≥ 30
- n p = 1 000 ∗ 0.002 = 2 ≤ 5 et
- p = 0.002 ≤ 0.1

Alors X suit la loi de Poisson P $(\lambda = np = 2)$ tel que : P (X = k) = $e^{-\lambda} * \lambda^k / k$!

$P(X=0) = 13.53\%$ et $P(X=1) = 27.02\%$

Exercice 4

Supposons que le nombre de particules d'amiante dans un mètre carré de poussière sur une surface suit une loi de Poisson avec une moyenne de 1000. Si un mètre carré de poussière est analysé, quelle est la probabilité que 950 particules ou moins soient trouvées ?

Solution

X : variable aléatoire nombre (entier) de particules d'amiante dans un mètre carré. X ~ P (1000).

Cette probabilité peut être exprimée exactement par la loi de Poisson

Comme P (X ≤ 950) = $\sum_{k=0}^{950} \frac{e^{-1000} * 1000^k}{k!}$

Cette probabilité cumulée ne peut être calculée que par une application se trouvant dans un mobile ou dans un ordinateur, et elle est égale à : 0.05783629553… ≈ **5.78 %**

La difficulté de ce calcul est claire ; et donc cette probabilité peut être approximée par la loi normale

P (X ≤ 950) ≅ P (Y ≤ 950.5)

= P (Z ≤ – 1.57) = 1 – Π(1.57) = 1– 0.9418=**0.0582**

Exercice 5

On lance un dé équilibré. Soit X le résultat obtenu.

1. Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Et calculer sa fonction de répartition ?
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire de Y = X + 2 ? Même question pour la variable aléatoire Z = X^2.
4. Calculer l'espérance et la variance des V.A de la question précédente.

Solution

Le lancement d'un dé équilibré va, à chaque fois, révéler une face de l'ensemble {1,2,…,6}.

x_i	1	2	3	4	5	6	Σ
$p_i = P(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
$F(x_i) = P(X \leq x_i)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1	
$p_i x_i$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	E(X) = 21/6 = 3.5
$p_i x_i^2 = p_i z_i$	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	$E(X^2) = 91/6$
$y_i = x_i + 2$	3	4	5	6	7	8	
$p_i y_i$	3/6	4/6	5/6	6/6	7/6	8/6	E(Y) = 33/6 = 5.5
$z_i = x_i^2$	1	4	9	16	25	36	
$p_i x_i^4 = p_i z_i^2$	1/6	16/6	81/6	256/6	625/6	1296/6	$E(Z^2) = E(X^4) = 2275/6$

1) Calcul de la loi de probabilité de la variable aléatoire X et sa fonction de répartition :
   Chaque résultat du Dé a la même probabilité d'apparition. On est donc en présence d'une loi uniforme sur l'ensemble {1 , 2 , … , 6} dont les probabilités sont données dans le tableau ci-dessus par $p_i = P(X = x_i) = 1/6$ pour tout i = 1 ,..., 6.

   La fonction de répartition de X est donnée par $F(x_i) = P(X \leq x_i)$ dans le tableau ci-dessus.
2) En appliquant les définitions on obtient :
   L'espérance mathématique de X, donnée dans le tableau ci-dessus par la formule :

   $E(X) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$

   La variance de la variable aléatoire X est donnée par la formule :

   $V(X) = = E(X^2) - [E(X)]^2 = \cong 2.9166667$
3) Détermination des lois de probabilité des variables aléatoires Y = X + 2 et $Z = X^2$.
   Les lois des variables aléatoires Y et Z obtenues à partir de la variable aléatoire X initiale (résultat du lancer d'un Dé équilibré) par les relations [Y = X + 2] et [$Z = X^2$] sont également uniformes sur des ensembles finis {3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8} et {1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36} respectivement. Ces lois sont les suivantes : $p_i = 1/6$, $\forall$ i = $\overline{1,6}$.
4) Soit la variable aléatoire Y = X + 2, elle est le translaté de X de 2 unités vers la droite.
   Son espérance sera donc translatée elle aussi de 2 unités vers la droite ; on aura donc,
   l'espérance mathématique $E(Y) = E(X + 2) = E(X) + 2 = \frac{11}{2} = 5.5$
   Par contre la variabilité de Y sera nécessairement identique à celle de X, vu qu'une translation ne changera en aucune façon les écarts entre les différentes valeurs possibles pour Y ; on obtient donc la variance $V(Y) = V(X + 2) = V(X) = \frac{35}{12} \cong 2.9166667$

Pour $Z = X^2$, la situation est différente. Tout d'abord le calcul de l'espérance n'est pas donné par une transformation simple de l'espérance de X et nécessite de revenir à la loi de X.

Pour ce faire on peut soit reprendre le résultat donné au point précédent, (tableau ci-dessus : $E(Z) = E(X^2) = 91/6 = 15 + 1/6$),

La variance $V(Z) = V(X^2)$, elle sera sérieusement augmentée vu que Z est clairement plus volatile que X. Cette intuition est confirmée par les calculs donnés dans le tableau ci-dessus :

$V(X^2) = E(X^4) - [E(X^2)]^2 = 22756/6 - (91/6)^2 = 149 + 5/36 = 149.13889$

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité :$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

Calculer la valeur de c ?

Solution

1) On a f(x) = c * (1 – x²) ; c étant une constante ; f(x) est définie dans l'intervalle –1 < x < +1. La dérivée de f(x) est : f'(x) = c * (– 2x) et elle s'annule au point x = 0 et la valeur de la fonction f au point x = 0 est f (0) = c. Les 2 racines de l'équation f(x) = 0 sont –1 et +1. Pour que la fonction f(x) soit une densité il faut que l'intégrale de la fonction f(x) entre –1 et +1 soit égale à l'unité.

$$\int_{-1}^{1} c(1-x^2)\,dx = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$$