المحور الرابع:

المتغيرات العشوائية Les Variables Aléatoires

تمهيد الفصل:

كل تجربة عشوائية تؤدي إلى مجموعة من النتائج قد تكون عددية (كمية) أو يُمكن أن تكون نوعية (كيفية)، فعند رمي قطعة نقود ومراقبة الوجه الظاهر نلاحظ أن النتيجة ستكون نوعية إما وجه أو صورة ويُمكن تحويل النتائج النوعية إلى عددية من خلال إعطاء قيم عددية للنتائج الظاهرة، فمثلا عند ظهور الوجه يُعبر عنه بالقيمة 1 وعند ظهور الصورة يُعبر عنه بالقيمة 0. إن القيم العددية هذه هي ما نعبر عنه بقيم المتغير العشوائي، حيث نحاول التطرق من خلال هذا المحور إلى تعريف المتغير العشوائي، أنواعه وكذا مميزاته العددية.

تعريف المتغير العشوائي: إن المتغير العشوائي هو مقدار يصف كمياً جميع النتائج الممكنة لتجربة عشوائية، ويأخذ مجموعة من القيم منتهية أو غير منتهية مرفقة بمجموعة من الاحتمالات، ويُرمز عادة للمتغير العشوائي بأحرف كبيرة $X\ ;\ Y\ ;\ Z$. ومن أجل حساب الاحتمالات المرفقة بكل قيمة يأخذها المتغير العشوائي لا بد من التمييز بين نوعين من المتغيرات العشوائية؛ متغير عشوائي منفصل وآخر متصل.

الجزء الأول: المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع):

نقول عن متغير عشوائي X أنه منفصل إذا كانت القيم التي يأخذها محدودة ومنتهية ضمن مجال تغيره أي أن:

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

مثال 1: في تجربة رمي قطعة نقود ثلاثة مرات متتالية: نعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد الوجوه الظاهرة.

الحل: ليكن لدينا: الحادث F ظهور الوجه والحادث P ظهور الصورة، ومنه فإن مجموعة النتائج المحصلة هي:

$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, PPP, PPF, PFP, FPP\}$$

$$X(\Omega) = \begin{cases} 0;\ (PPP) \\ 1;\ (FPP, PFP, PPF) \\ 2;\ (FFP, FPF, PFF) \\ 3;\ (FFF) \end{cases} \qquad \Rightarrow X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

1. قانون التوزيع الاحتمالي La loi de Probabilité:

قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X هو الاحتمالات المرفقة بقيم المتغير العشوائي والذي يأخذ قيمه في المجال $[0, 1]$، ويُمكن توضيح قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل كما يلي:

x_i	x_1	x_2	x_3	.....	x_n	Σ
$P(X)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	.....	$P(x_n)$	1

نتيجة: حتى نقول أن المتغير العشوائي X قانون توزيع احتمالي يجب تحقق الشرطين التاليين:

$$\forall\ i \in \aleph; \quad P(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$

مثال 2: بالاعتماد على معطيات المثال رقم 1 حدد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X (عدد الأوجه الظاهرة).

الحل: سبق وأن وجدنا القيم الممكنة للمتغير العشوائي X وهي: $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

الآن نحسب الاحتمالات المرفقة بكل قيمة يأخذها المتغير العشوائي X كما يلي: (عدد الحالات الاجمالية 8)

$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, PPP, PPF, PFP, FPP\}$$

- $(PPP) \Rightarrow P(X = 0) = 1/8 = 0{,}125$

- $(FPP, PFP, PPF) \Rightarrow P(X=1) = 3/8 = 0{,}375$
- $(FFP, FPF, PFF) \Rightarrow P(X=2) = 3/8 = 0{,}375$
- $(FFF) \Rightarrow P(X=3) = 1/8 = 0{,}125$

ويُمكن توضيح هذه النتائج في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	0,125	0,375	0,375	0,125	1

2. تابع التوزيــع الاحتمالي Fonction de Répartition:

تابع التوزيع للمتغير العشـوائي المنفصل X هـو ذلك التابع الـذي يعطينا احتمال أن يأخذ المتغير العشـوائي X أية قيمة أصغر من أو تساوي قيمة معينة x ، يُرمز لتابع التوزيع بالرمز $F(x)$ ويُعبر عنه بالصيغة الرياضية التالية:

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)$$

إذا كان لدينا جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـوائي X التالي:

x_i	x_1	x_2	x_3	.....	x_n	Σ
$P(X)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	.....	$P(x_n)$	1

فـإن تـابع التوزيــع يكـون علـى الشكل الموالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ P(x_1) + P(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ P(x_1) + \cdots + P(x_3) & x_3 \leq x < x_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ P(x_1) + \cdots + P(x_n) & x \geq x_n \end{cases}$$

نتائج: من أجل كل عددان حقيقيان a, b فإن :

$P(X \leq a) = F(a)$
$P(X > b) = 1 - P(X \leq b) = 1 - F(b)$
$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a); \qquad a < b$

مثال 3: في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، نفرض أن X متغير عشـوائي منفصل يُمثل الوجه العلوي الظاهر. حدد القانون الاحتمالي لـ تابع التوزيع ومثله بيانياً واحسب: $P(X \leq 5)$, $P(1 < X \leq 3)$ و $P(X > 3)$

الحل: نتائج رمي زهرة النرد هي: $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وكل الأوجه لها نفس الاحتمال $1/6$ ومنه:

x_i	1	2	3	4	5	6	Σ
$P(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
$F(x)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	–

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ P(x=1) = 1/6 & 1 \leq x < 2 \\ P(x=1) + P(x=2) = 2/6 & 2 \leq x < 3 \\ P(x=1) + \cdots + P(x=3) = 3/6 & 3 \leq x < 4 \\ P(x=1) + \cdots + P(x=4) = 4/6 & 4 \leq x < 5 \\ P(x=1) + \cdots + P(x=5) = 5/6 & 5 \leq x < 6 \\ P(x=1) + \cdots + P(x=6) = 6/6 & x \geq 6 \end{cases}$$

$P(X \leq 5) = F(5) = 5/6$
$P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = 3/6 - 1/6 = 2/6$
$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 3/6 = 3/6$

3. المميـــزات العدديـــة للمتغير العشوائي المنفصل:

المميزات العددية للمتغير العشوائي تعطينا اختصار لكيفية انتشار القيم، حيث نجد التوقع (الأمل) الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

1.3 التوقع الرياضي L'Espérance Mathématique: ليكن لدينا المتغير العشوائي X حيث:

$$(\Omega) = \{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n\}$$

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل X هو العدد الحقيقي $E(X)$ المعرف كما يلي:

$$E(X) = \sum x_i P(x_i)$$

خاصية: إذا كان X متغير عشوائي منفصل و a , b عددان حقيقيان فإن:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

مثال 4: ليكن لدينا دارة كهربائية تتكون من عنصرين مربوطين على التسلسل، احتمال توقف كل عنصر عن العمل خلال فترة زمنية هو: $0{,}2$ وليكن X متغير عشوائي منفصل يُمثل عدد العناصر المتوقفة خلال الفترة الزمنية. حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X ثم أحسب: التوقع الرياضي و $E(2X + 1)$.

الحل: قيم المتغير العشوائي الممكنة هي: $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$X = 0 \rightarrow$ العنصران غير متوقفان $\rightarrow P(X = 0) = 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$

$X = 1 \rightarrow$ أحد العناصر متوقف $\rightarrow P(X = 1) = (0{,}2 \times 0{,}8) + (0{,}8 \times 0{,}2) = 0{,}32$

$X = 2 \rightarrow$ العنصران متوقفان $\rightarrow P(X = 2) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$

x_i	0	1	2	Σ
$P(x_i)$	0,64	0,32	0,04	1

$$E(X) = \sum x_i P(x_i) = 0 \times (0{,}64) + 1 \times (0{,}32) + 2 \times (0{,}04) = 0{,}40$$

$$E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = 2 \times (0{,}40) + 1 = 1{,}80$$

2.3 التباين La Variance: يُدعى التوقع الرياضي لمربع انحراف قيم المتغير العشوائي X عن توقعها الرياضي بتباين X ويُرمز له بالرمز $V(X)$ ويُحسب بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X^2 - 2X \times E(x) + E(X)^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

علماً أن: $E(X^2) = \sum x_i^2 P(x_i)$

خاصية: إذا كان X متغير عشوائي منفصل و a , b عددان حقيقيان فإن:

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

3.3 الانحراف المعياري L'Ecart Type: الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين أي هو الجذر التربيعي لمتوسط الانحرافات المربعة للقيم عن توقعها الرياضي، ويُرمز له بالرمز σ_x حيث:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E\big(X - E(X)\big)^2} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

مثال 5: بالعودة لمعطيات المثال رقم 4. أحسب التباين والانحراف المعياري ثم $V(2X + 10)$؟

الحل:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0{,}48 - (0{,}40)^2 = 0{,}32$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 P(x_i) = 0^2 \times (0{,}64) + 1^2 \times (0{,}32) + 2^2 \times (0{,}04) = 0{,}48$$

$$V(X) = 0{,}32 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}32} = 0{,}57$$

$$V(2X + 10) = 2^2 V(X) = 4 \times 0{,}32 = 1{,}28$$

الجزء الثاني: المتغير العشوائي المتصل (المستمر):

يُصادفنا في كثير من الأحيان متغيرات عشوائية تأخذ جميع القيم في مجال ما، مثل هذه المتغيرات تسمى متغيرات عشوائية متصلة.. وكمثال على ذلك طول تلميذ في عمر 16 سنة يُعتبر متغير عشوائي متصل لأنه يُمكن أن يأخذ أي قيمة في المجال 150 سم إلى 180 سم. وعليه فالاحتمال في حالة المتغير العشوائي المتصل عبارة عن المساحة تحت منحنى التمثيل البياني لدالة الكثافة والمحصورة بين نقطتين معينتين.

1. قانون التوزيع الاحتمالي:

إذا كان لدينا X متغير عشوائي متصل فإن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يُعطى في شكل دالة تسمى بدالة الكثافة يرمز لها بالرمز $f(x)$ ومُعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & a \le x \le b \\ 0 & sinon \text{ (ما عدا ذلك)} \end{cases}$$

ملاحظات:

- انطلاقاً من القانون السابق يُمكننا حساب قيمة الاحتمالات لأي مجال $[a \; - \; b]$ كما يلي:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$P(x = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

- نقول بأن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية إذا تحقق الشرطين التاليين:

$$\forall x \in R, f(x) \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

- الإشارتان $\le$ و $<$ متكافئتان ونفس الشيء بالنسبة للإشارتين $\ge$ و $>$ وعليه فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = P(a \le x \le b) = P(a < x < b) = P(a < x \le b) = P(a \le x < b)$$

مثال 6: ليكن لدينا X متغير عشوائي متصل مُعرف بدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & 0 \le x \le 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

أُحسب الاحتمالات التالية: $P(0 < x < 1)$ ، $P(x > 1)$ ، $P(-2 \le x \le 2)$

الحل:

$$P(0 < x < 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{9}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{27}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{27}$$

$$P(x > 1) = 1 - P(x \le 1) = 1 - \int_0^1 f(x)dx = 1 - \left[\frac{1}{27}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

$$P(-2 < x < 2) = \int_{-2}^0 0dx + \int_0^2 \left(\frac{1}{9}x^2\right)dx = 0 + \left[\frac{1}{27}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{27}$$

مثال 7: ليكن لدينا X متغير عشوائي متصل مُعرف بالدالة الاحتمالية التالية:

$$f(x)=\begin{cases} cx & 1\le x\le 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

أحسب قيمة الثابت c حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية ثم أحسب $P(1\le x\le 2)$؟

الحل:

حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{1} 0dx+\int_{1}^{3} cxdx+\int_{3}^{+\infty} 0dx=1 \Leftrightarrow c\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3=1 \Leftrightarrow c\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)=1$$
$$\Rightarrow c=\frac{1}{4}$$

وعليه يصبح لدينا:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x & 1\le x\le 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$P(1\le x\le 2)=\int_1^2 \left(\frac{1}{4}x\right)dx=\left[\frac{1}{8}x^2\right]_1^2=\frac{4}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}=0{,}375$$

2. تابع التوزيــع الاحتمالي:

إذا كان X متغير عشوائي متصل محدد بتابع كثافة $f(x)$ فإنه يمكن أن يحدد تابع التوزيع كما يلي:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

نتائج: من أجل كل عددان حقيقيان a,b حيث: $a<b$ فإن:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ;x\le a \\ \int_a^b f(x)dx & ;a\le x\le b \\ 1 & ;x\ge b \end{cases}$$

$$P(X\le a)=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=F(a)$$

$$P(X\ge b)=1-P(X\le b)=1-\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=1-F(b)$$

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

مثال 8: ليكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

عين تابع التوزيع الاحتمالي ثم أحسب الاحتمالات التالية: $P\left(\frac{1}{4}\le X\le 2\right)$، $P\left(X\le\frac{1}{2}\right)$، $P\left(X\ge\frac{3}{4}\right)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \Rightarrow F(x)=\begin{cases} 0 & ;x\le 0 \\ \int_0^1 2xdx & ;0\le x\le 1 \\ 1 & ;x\ge 1 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ;x\le 0 \\ x^2 & ;\ 0\le x\le 1 \\ 1 & ;x\ge 1 \end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{4}\le X\le 2\right)=F(2)-F\left(\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$
$$P\left(X > \frac{3}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

3. المميزات العددية للمتغير العشوائي المتصل:

1.3 التوقع لرياضي: ليكن لدينا X متغير عشوائي متصل ذو دالة كثافة احتمالية $f(x)$، يحسب التوقع الرياضي في هذه الحالة بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

2.3 التباين: ليكن لدينا X متغير عشوائي متصل ذو دالة كثافة احتمالية $f(x)$، يحسب التباين في هذه الحالة بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

3.3 الانحراف المعياري: الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين، حيث:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

مثال 9: بالعودة لمعطيات التمرين رقم 8 أحسب المميزات العددية للمتغير العشوائي المتصل X

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x(0)dx + \int_{0}^{1} x(2x)dx + \int_{1}^{+\infty} x(0)dx = \int_{0}^{1} 2x^2 dx$$

$$E(X) = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx + \int_{0}^{1} x^2(2x)dx + \int_{1}^{+\infty} x^2(0)dx = \int_{0}^{1} 2x^3 dx$$

$$E(X^2)\left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$