الفصل الثاني: المتغير العشوائي

مفهوم المتغيرة العشوائية

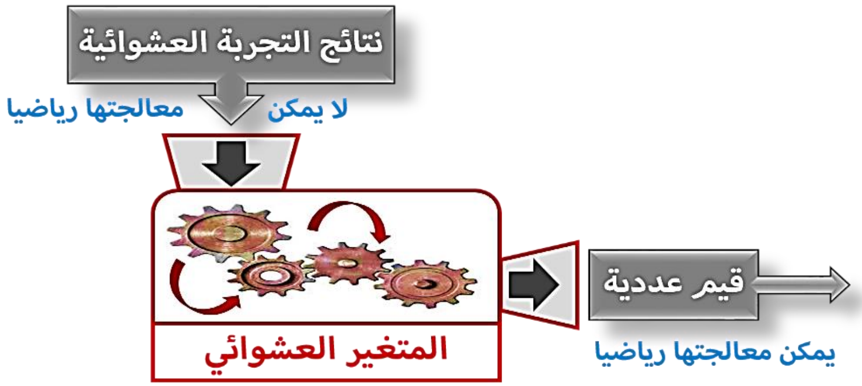
عند دراسة تجربة عشوائية، قد يكون اهتمامنا متوجها إلى نتائج تلك التجربة بذاتها كما رأينا في الفصل السابق، وقد يكون الاهتمام متوجها إلى قيم عددية مرتبطة بالنتائج، وهذه القيم تسمى بالمتغير العشوائي. فمثلا في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، وبافتراض أن الحادث A يمثل ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل، فإن فضاء العينة Ω (مجموعة الامكانيات) والحادث A واحتماله هم على التوالي:

$$\boldsymbol{\Omega = \{PP\,,\,PF\,,\,FP\,,\,FF\}}$$
$$\boldsymbol{A = \{PP\,,\,PF\,,\,FP\}}$$
$$\boldsymbol{P(A) = \frac{3}{4}}$$

أما في حالة المتغير العشوائي، فيكون الاهتمام متوجها على سبيل المثال إلى عدد مرات ظهور الصورة، فتكون القيم العددية التي يأخذها المتغير العشوائي وليكن X في المثال السابق هي:

$$\boldsymbol{X = \{0\,,\,1\,,\,2\}}$$

مما سبق، يمكننا أن نعرف المتغير العشوائي X على أنه: عبارة عن دالة حقيقية معرفة من المجموعة Ω إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R. والهدف من استخدام المتغير العشوائي على التجارب العشوائية هو تحويل النتائج إلى قيم عددية ليتم بالتالي معالجتها رياضيا.



مثال

لتكن التجربة هي قذف قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين بشكل مستقل، ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهرة في الرميتين

1- عبر عن المتغير العشوائي كدالة

2- أوجد مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

3- عبر عن الحوادث التالية باستخدام المتغير العشوائي

$$\{(FF)\},\ \{(PF),(FP)\},\{(PP)\},\{(PP),(PF),(FP)\}$$

4- عبر عن الحوادث التالية باستخدام نقاط العينة

$$\{X=0\},\{X=1\},\{X=2\},\{X<1\},\{X\leq 1\},\{X>5\}$$

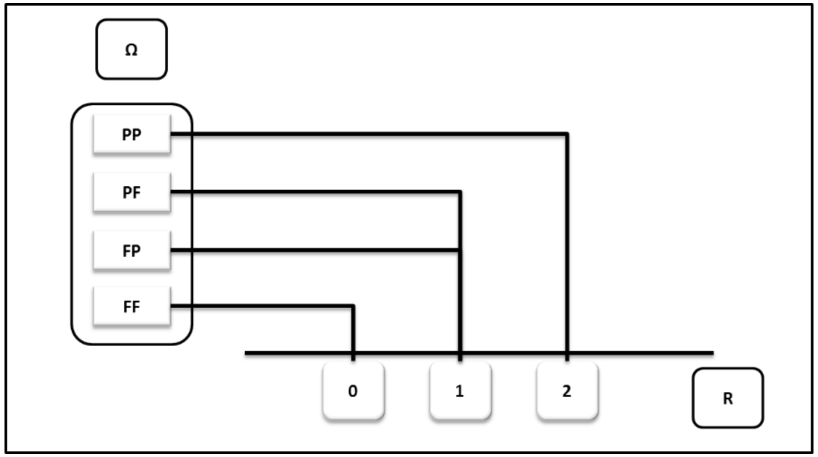
5- أوجد الاحتمالات التالية

$$P\{X=0\},P\{X=1\},P\{X=2\},P\{X<1\},P\{X\leq 1\},P\{X>5\}$$

الحل

X : يمثل عدد الصور الظاهرة في الرميتين

هذا يعني أن المتغير العشوائي X يعطي كل عنصر من عناصر Ω قيمة حقيقية وحيدة في R كما يلي:



$$X(PP)=2\,,\ X(PF)=1\,,\ X(FP)=1\,,\ X(FF)=0$$

كما يمكن التعبير عن المتغير العشوائي X كدالة في الجدول التالي:

نقطة العينة w	قيمة المتغير العشوائي X(w)
PP	2
PF	1
FP	1
FF	0

2- مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي:

$$X(\Omega) = \{x \in R : X(w) = x,\ w \in \Omega\} = \{0,\ 1,\ 2\}$$

3- التعبير عن الحوادث باستخدام المتغير العشوائي:

$$\{(FF)\} = \{X = 0\} = \{\text{عدم ظهور صورة}\}$$

$$\{(PF),(FP)\} = \{X = 1\} = \{\text{ظهور صورة واحدة فقط}\}$$

$$\{(PP)\} = \{X = 2\} = \{\text{ظهور صورتان}\}$$

$$\{(PP),(PF),(FP)\} = \{X \geq 1\} = \{\text{ظهور صورة واحدة على الأقل}\}$$

4- التعبير عن الحوادث باستخدام نقاط العينة:

$$\{X = 0\} = \{FF\}$$

$$\{X = 1\} = \{(PF),(FP)\}$$

$$\{X = 2\} = \{PP\}$$

$$\{X < 1\} = \{X = 0\} = \{FF\}$$

$$\{X \leq 1\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\} = \{(FF),\ (PF),\ (FP)\}$$

$$\{X > 5\} = \emptyset$$

5- ايجاد الاحتمالات

بما أن القطعة النقدية متزنة، فإن التجربة متساوية الفرص، أي أن:

$$P(PP) = P(PF) = P(FP) = P(FF) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

وباستخدام هذه الحقيقة، فإننا نوجد الاحتمالات المطلوبة كما يلي:

$$P(X = 0) = P(FF) = 0{,}25$$

$$P(X = 1) = P\big((PF),(FP)\big) = P(PF) + P(FP) = 0{,}5$$

$$P(X = 2) = P(PP) = 0{,}25$$

$$P(X < 1) = P(X = 0) = P(FF) = 0{,}25$$

$$P(X \leq 1) = P\big((FF),\ (PF),\ (FP)\big) = P(FF) + P(PF) + P(FP) = 0{,}75$$

$$P(X > 5) = P(\emptyset) = 0$$

حالة المتغير العشوائي (م.ع) المنفصل

- **قانون التوزيع الاحتمالي:** عند إجراء أي تجربة فإن المتغير العشوائي $\boldsymbol{x}$ يأخذ قيما صحيحة ضمن المجموعة الكلية Ω ويكون مقترنا باحتمالات معينة، ويمكن عندئذ وضعه في جدول يدعى بقانون التوزيع الاحتمالي يكون من الشكل:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	$\sum$
$P(x_i)$	P_1	P_2	…	P_n	1

مثال

في تجربة رمي قطعة نقود 3 مرات، أوجد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير x الممثل لعدد مرات ظهور الوجه «P»

$$\Omega = \{(PPP),(PPF),(PFP),(PFF),(FPP),(FPF),(FFP),(FFF)\}$$

من خلال هذه النتائج يكون التوزيع الاحتمالي من الشكل:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
$P(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

- **تابع التوزيع الاحتمالي:** ليكن x م.ع متقطع، يرمز لتابع التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير بالرمز **F(x)** حيث:

$$F(x) = P(x \leq x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(x = x_i)$$

مثال

عند رمي حجر نرد يكون

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ويكون عندئذ:

☜ قانون التوزيع الاحتمالي:

x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$P(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

☜ تابع التوزيع الاحتمالي:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ P(x=1)=\frac{1}{6} & 1\le x<2 \\ P(x=1)+P(x=2)=\frac{1}{3} & 2\le x<3 \\ P(x=1)+\cdots+P(x=3)=\frac{1}{2} & 3\le x<4 \\ P(x=1)+\cdots+P(x=4)=\frac{2}{3} & 4\le x<5 \\ P(x=1)+\cdots+P(x=5)=\frac{5}{6} & 5\le x<6 \\ P(x=1)+\cdots+P(x=6)=1 & x\ge 6 \end{cases}$$

المميزات العددية للمتغير العشوائي المنفصل

التوقع الرياضي E(x): التوقع الرياضي لـلمتغير العشوائي x هو العدد $E(x)$ المعرف كما يلي:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(x=x_i)$$

مثال

عند رمي زهرة النرد يكون:

$$E(x)=1\times P(x=1)+\cdots+6\times P(x=6)=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\cdots+\frac{6}{6}=\frac{21}{6}=3.5$$

التباين V(x) والانحراف المعياري σ_x: تباين الـمتغير العشوائي x يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$V(x)=E\big(x-E(x)\big)^2=E(x^2)-(E(x))^2$$

$$E(x^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(x=x_i) \quad ,\sigma_x=\sqrt{V(x)}$$

مثال

في تجربة رمي حجر النرد يكون:

$$E(x^2)=1^2P(x=1)+\cdots+6^2P(x=6)=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\cdots+\frac{36}{6}=\frac{91}{6}$$

$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{21}{6}\right)^2=2.9\Rightarrow \sigma_x=\sqrt{2.9}=1.7$$

خصائص التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل

$$E(k)=k \quad (k \text{ عدد ثابت})$$

$$E(kX)=kE(X)$$

$$E(kX\pm b)=kE(X)\pm b$$

$$E(X+k)=E(X)+k$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

إذا كانت المتغيرتان مستقلتان $E(X\times Y)=E(X)\times E(Y)$

خصائص التباين للمتغير العشوائي المنفصل

$$V(k)=0 \quad (k \text{ عدد ثابت})$$

$$V(kX)=k^2V(X)$$

$$V(X+k)=V(X-k)=V(X)$$

في حالة استقلال المتغيرتين عن بعضهما فإن:

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)$$

مثال 1

قدر مستثمر ان نتيجة مشروع معين ستكون إما ربح 20 مليون دج أو ربح 40 مليون دج أو ربح 60 مليون دج، أو خسارة 10 مليون دج أو خسارة 30 مليون دج أو خسارة 50 مليون دج. بفرض أن النتائج السابقة متساوية الاحتمال، هل المشروع مجدي اقتصاديا؟ (ما هو التوقع الرياضي للنتيجة)

(نتيجة المشروع) X	- 50	- 30	- 10	20	40	60	المجموع
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$X.P(X=x)$	$\frac{-50}{6}$	$\frac{-30}{6}$	$\frac{-10}{6}$	$\frac{20}{6}$	$\frac{40}{6}$	$\frac{60}{6}$	5

بما أن التوقع الرياضي لنتيجة المشروع موجب (ربح) فإن المشروع مجدي

مثال 2

تتوقع مؤسسة أن تتلقى كل شهر 3 طلبيات من العميل A و4 من العميل B

- أحسب العدد المتوقع من الطلبيات المتلقاة من A في السنة
- أحسب العدد الإجمالي المتوقع من الطلبيات المتلقاة في الشهر

$$E(12A) = 12E(A) = 12(3) = 36$$

$$E(A \times B) = E(A) \times E(B) = 4 \times 3 = 12$$

مثال 3

نلقي قطعة نقدية مرتين، نسمي X عدد مرات الحصول على P. أحسب قيمة V(X)

لتكن المتغيرة Y=2X. أحسب قيمة V(Y)

نلقي حجر نرد ونسمي Z النتيجة المتحصل عليها، أحسب تباين المتغيرة W حيث: W=Z-Y

X	0	1	2	$\sum$
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
$X.P(X)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$E(X) = 1$
X^2	0	1	4	-
$X^2.P(X)$	0	$\frac{1}{2}$	1	$E(X^2) = \frac{3}{2}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$V(Y) = V(2X) = 2^2V(X) = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

Z	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$P(Z)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$Z.P(Z)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	E(Z) = 21/6
Z^2	1	4	9	16	25	36	-
$Z^2.P(Z)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{36}{6}$	E(Z2) = 91/6

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = 2.92$$

$$V(W) = V(Z) + V(Y) = 2{,}92 + 2 = 4{,}92$$

حالة المتغير العشوائي (م.ع) المتصل

تعريف: نقول عن م.ع أنه مستمر إذا كان يأخذ قيما ضمن مجال معين، وقيمه تعطى دائما في شكل دالة تسمى **تابع الكثافة** ويرمز لها بالرمز f(x) حيث:

$$\forall x: f(x) \geq 0 \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

ملاحظة: إذا كان:

$$x \in [a,b] \Rightarrow P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

و كذلك:

$$P(x = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

تابع التوزيع الاحتمالي: يعطى تابع التوزيع لـلمتغير العشوائي المستمر بالعلاقة التالية:

$$F(x) = P(x \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \;; f(x) = F'(x)$$

مثال

ليكن x م.ع معرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x < 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

تأكد أن $f(x)$ هو تابع كثافة ثم أحسب تابع التوزيع لهذا المتغير

$$f(x) = \frac{1}{2} > 0$$

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big]_1^3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

ومنه $f(x)$ هو تابع كثافة

أما قيم تابع التوزيع فتعطى بالشكل:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{2}x & 1\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

ملاحظة: في التوزيعات المستمرة، الإشارتان $<$, $\le$ و $>$, $\ge$ متكافئتان أي:

$$\int_a^b f(x)dx=P(a<x<b)=P(a\le x<b)=P(a<x\le b)=P(a\le x\le b)$$

خصائص

$$P(x\le a)=F(a)$$

$$P(x>b)=1-P(x\le b)=1-F(b)$$

$$P(a\le x\le b)=F(b)-F(a)$$

المميزات العددية للمتغير العشوائي المتصل

التوقع الرياضي E(x) : يعطى وفقا للعلاقة

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

التباين V(x) والانحراف المعياري σ_x: يعطى وفقا للعلاقة

$$\sigma_x=\sqrt{E(x^2)-(E(x))^2}$$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

مثال

ليكن x م.ع معرف كما يلي

$$f(x)=\begin{cases}2x & x\in[0,1]\\ 0 & x\notin[0,1]\end{cases}$$

أحسب قيمة كل من التوقع الرياضي والانحراف المعياري

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(2x)dx=\int_{-\infty}^{0} 2x^2dx+\int_{0}^{1} 2x^2dx+\int_{1}^{+\infty} 2x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(2x)dx=\frac{1}{2}x^4\Big]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\sigma_x=\sqrt{E(x^2)-(E(x))^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=0.24$$

تنبيه: يمكن مشاهدة الشرح التفصيلي للمحاضرات و حلول سلاسل التمارين من خلال متابعة قناة الأستاذ المكلف بالمادة، و ذلك من خلال الرابط التالي:

www.youtube.com/c/drsaadouadel

لتسهيل عملية البحث يرجى النقر على **PLAYLISTS** أي **قوائم التشغيل** ثم اختيار **محاضرات الإحصاء 2 (الاحتمالات)** لعرض كل الفيديوهات حسب تسلسلها الزمني

لا تنسوا الاشتراك في القناة ليصلكم كل جديد