المحور الثالث: اختبار الفرضيات الإحصائية (اختبار معالم المجتمع)

تمهيد

تم التطرق فيما سبق إلى وسائل دراسة معالم المجتمع المجهولة وذلك من خلال إنشاء فترات ثقة لهذه المعالم واستخدامها كمعلومة مساندة لاتخاذ القرارات، حيث يتم استخدام بيانات عينة عشوائية مسحوبة من المجتمع المراد تقدير معالمه لإنشاء فترة الثقة المطلوبة عند مستوى ثقة معين. وعليه، فإن النتيجة المتحصل عليها من خلال فترات الثقة يمكن غالبا صياغتها نصيا بالشكل التالي:

باحتمال $1-\alpha$ نحن متأكدون بأن فترة الثقة المنشأة سوف تحتوي على القيمة الحقيقية المجهولة لمعلمة المجتمع

يلاحظ هنا أن فترة الثقة يتم إنشاؤها بالاعتماد على بيانات عينة عشوائية، ليتم استخدام تلك الفترة في عمليات الاستدلال الإحصائي حول القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع. ولكن في الواقع العملي غالبا ما يكون هنالك إدعاء مسبق حول قيمة المعلمة المجهولة. وليس بالضرورة أن يكون الإدعاء مرتبط بقيمة محددة، حيث يمكن أن يكون الإدعاء ذا صيغة رياضية، كأن ينص مثلا على أن قيمة المعلمة لا تزيد عن قيمة محددة أو أن تكون أكبر أو أصغر من قيمة محددة. في هذه الحالة يكون الهدف من الاستدلال الإحصائي أكثر تحديدا منه في عملية إنشاء فترة ثقة، حيث يكون منصبا حول البحث في مصداقية الإدعاء المطروح، وبالتالي الوصول إلى قرار بقبول أو رفض الإدعاء.

مثال

نفرض إن باحثا ما ادعى إن متوسط أعمار طلبة الجامعة لا يختلف عن متوسط أعمار الطالبات (تخمين مسبق من طرف الباحث). للتأكد من ذلك فإنه من المنطق أن نقوم بحصر أعمار الطلبة والطالبات (من المجتمع ككل)، ومنها نحسب المتوسط لكل منهما ثم نقرر من منهما أكبر. ولكن عملية الحصر قد تكون صعبة ومجهدة، لذلك نضطر إلى اختيار عينة عشوائية من بين الطلبة وعينة عشوائية من بين الطالبات ونحسب متوسط العمر في كل عينة منهما، فإذا كان متوسط عمر الطالب هو 24وكان متوسط عمر الطالبة هو 22 فهل يعني ذلك أن متوسط عمر الطلبة أكبر من متوسط عمر الطالبات؟

بشكل عام وانطلاقا من هذه الوضعية، يمكن التعبير عن مثل هكذا ادعاء أو تخمين من خلال أحد الصور الثلاث التالية:

متوسط أعمار طلبة الجامعة **يساوي** متوسط أعمار الطالبات

متوسط أعمار طلبة الجامعة **أكبر من** متوسط أعمار الطالبات

متوسط أعمار طلبة الجامعة **أقل من** متوسط أعمار الطالبات

كل صورة من تلك الصور الثلاث يعد افتراضا يمكن قبوله كما يمكن رفضه

يطلق على عملية التعامل مع الافتراضات والحكم على مصداقيتها بعملية اختبار الفرضيات. وتوجد علاقة بين كل من إنشاء فترة ثقة واختبار الفرضيات، حيث يمكن القول بأن اختبار الفرضيات تعطي معلومة أكثر دقة في اتخاذ القرارات من المعلومة المتحصل عليها من خلال إنشاء فترات الثقة. بيد أنه يمكن الاعتماد على فترات الثقة في بعض الحالات للوصول إلى نتائج حول صحة فرضية من عدمها.

وقبل الخوض في هذا المحور، فإنه من الضروري التطرق إلى المفاهيم الأساسية لاختبار الفرضيات الإحصائية، والتي يمكن حصر أهمها في النقاط التالية:

تعريف الفرضية الإحصائية

هي عبارة عن ادعاء أو تخمين أو تصور معين حول معلمة من معالم المجتمع (المتوسط، نسبة، فروق أو مجاميع) ويكون المطلوب اختبار صحة هذا الادعاء أو التخمين

فرضية العدم والفرضية البديلة

في عمليات الاستدلال الإحصائي يتم وضع رموز تمثل الادعاء وعكس الادعاء. فبالنسبة للفرض الذي ينص على عدم صحة الادعاء يتم استخدام الرمز H_0 ويطلق عليها فرضية العدم أو الفرضية الصفرية دلالة على عدم وجود أدلة قوية تساند الادعاء المطروح. وبشكل عام فرضية العدم تعني انعدام الاختلاف والتباين أي تعني التساوي $(=)$

يتم في المقابل استخدام الرمز H_1 للدلالة على الفرض المغاير للفرض العدمي ويطلق عليها الفرضية البديلة وأحيانا بفرضية القبول أي القبول بوجود الاختلاف والتباين $(\neq, \ >, \ <)$. وبالطبع عند إجراء اختبار لفرضية باستخدام الطرق المطلوبة، فإن الادعاء يقع دوما في الفرضية البديلة. وبمعنى آخر يمكن القول بأن الادعاء الجيد والقابل للاختبار إحصائيا يجب أن يكون في الفرضية البديلة لا في فرضية العدم

تتطلب عملية اختبار الفرضيات أن يكون الادعاء المرغوب في اختباره عبارة عن جملة كاملة تحتمل الصواب والخطأ. كذلك يفترض أن يكون الادعاء متعلق بقيمة معلمة محددة كمتوسط متغير ما أو نسبة حدوث حدث معين. وبهدف الحصول على ادعاء جيد يتطلب الأمر أن يكون الادعاء متعلق بإحدى الحالات الثلاث التالية:

أن تكون قيمة معلمة المجتمع **أقل من** قيمة محددة

أن تكون قيمة معلمة المجتمع **أكبر من** قيمة محددة

أن تكون قيمة معلمة المجتمع **مختلفة عن** قيمة محددة

وبالطبع يتم صياغة الفرضية المقابلة للادعاء بالصياغة المغايرة لجملة الادعاء لتقع في فرضية العدم، حيث لا تخرج عن إحدى الثلاث صياغات المقابلة للصياغات السابقة على التوالي:

أن تكون قيمة معلمة المجتمع **لا تقل عن** قيمة محددة

أن تكون قيمة معلمة المجتمع **لا تزيد عن** قيمة محددة

أن تكون قيمة معلمة المجتمع **لا تختلف عن** قيمة محددة

مستوى المعنوية α ودرجة الثقة $(1-\alpha)$

- إن القرار الذي سوف نتخذه بناء على الاختبار الإحصائي لا يمكن اعتباره صحيح 100%، فهناك مقدار من الخطأ لأن المعلومات التي نتخذ قرارنا بناء عليها بيانات مأخوذة من العينة وليس من المجتمع الأصلي
- في اختبار فرض معين، فإن مقدار ثقتنا في القرار المتخذ بالرفض أو القبول يسمى بدرجة الثقة ويرمز له بالرمز $(1-\alpha)$ كما وأن مقدار عدم الثقة أو مقدار الخطأ يسمى بمستوى المعنوية ويرمز له بالرمز α

وعادة يحدد الباحث مستوى المعنوية أو درجة الثقة قبل البدء في عملية الاختبار. وعند اختبار فرض العدم Ho ضد الفرض البديل $H1$ نجد أننا أمام إحدى الحالات الأربع الآتية:

	H_0 صحيح	H_0 خطأ
قبول H_0	قرار سليم	قرار خاطئ (خطأ من النوع الثاني)
رفض H_0	قرار خاطئ (خطأ من النوع الأول)	قرار سليم

الحالة الأولى: أن يكون فرض العدم صحيحا ويكون القرار بقبوله، فهذا قرار سليم

	H_0 خطأ	H_0 صحيح
قبول H_0	قرار خاطئ (خطأ من النوع الثاني)	**قرار سليم**
رفض H_0	قرار سليم	قرار خاطئ (خطأ من النوع الأول)

الحالة الثانية: أن يكون فرض العدم صحيحا ويكون القرار برفضه، فهذا قرار خاطئ

(الخطأ من النوع الأول: رفض Ho عندما يكون Ho صحيحا ويرمز لحجم هذا الخطأ بالرمز α)

	H_0 خطأ	H_0 صحيح
قبول H_0	قرار خاطئ (خطأ من النوع الثاني)	قرار سليم
رفض H_0	قرار سليم	**قرار خاطئ (خطأ من النوع الأول)**

الحالة الثالثة: أن يكون فرض العدم خطأ ويكون القرار برفضه، فهذا قرار سليم

	H_0 خطأ	H_0 صحيح
قبول H_0	قرار خاطئ (خطأ من النوع الثاني)	قرار سليم
رفض H_0	**قرار سليم**	قرار خاطئ (خطأ من النوع الأول)

الحالة الرابعة: أن يكون فرض العدم خطأ ويكون القرار بقبوله، فهذا قرار خاطئ

(الخطأ من النوع الثاني: قبول Ho عندما يكون Ho خاطئ ويرمز لحجم هذا الخطأ بالرمز β)

	H_0 خطأ	H_0 صحيح
قبول H_0	**قرار خاطئ (خطأ من النوع الثاني)**	قرار سليم
رفض H_0	قرار سليم	قرار خاطئ (خطأ من النوع الأول)

الخطاءان من النوع الأول والثاني

إن اتخاذ القرار يعتمد على قيمة المشاهدة الإحصائية الاختبار، أي على القيمة المحسوبة من العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع، وقد تكون هذه العينة لا تمثل المجتمع الذي سحبت منه تمثيلا صحيحا، مما يؤدي إلى وقوع متخذ القرار في خطأ من اثنين هما:

الخطأ من النوع الأول

يحدث هذا الخطأ إذا كانت فرضية العدم في الحقيقة صحيحة، ولكن بيانات العينة تظهر أنها غير صحيحة، أي أن نتائج العينة تؤدي إلى رفض فرضية العدم مع أنها في الواقع صحيحة. ويرمز لاحتمال وقوع خطأ من النوع الأول أي لاحتمال رفض فرضية العدم مع أنها في الواقع صحيحة بالرمز α ويطلق عليه اسم مستوى المعنوية أي أن:

$$\alpha = P\left(\text{ارتكاب خطأ من النوع الأول}\right) = P\left(\text{رفض فرضية العدم } H_0 / \text{ فرضية العدم } H_0 \text{ صحيحة}\right)$$

الخطأ من النوع الثاني

يحدث هذا الخطأ نتيجة لقبول فرضية العدم مع أنها في الواقع غير صحيحة، أي أن بيانات العينة تؤيد فرضية العدم مع أنها في الحقيقة غير صحيحة، ويرمز إلى احتمال وقوع الخطأ من النوع الثاني، أي احتمال قبول فرضية العدم مع أنها في الواقع خاطئة بالرمز β، أي أن:

$$\beta = P\left(\text{ارتكاب خطأ من النوع الثاني}\right) = P\left(H_0 \text{ قبول فرضية العدم/العدم فرضية } H_0 \text{ خاطئة}\right)$$

خطوات اختبار الفرض الإحصائي

أولا- صياغة فرضية العدم والفرضية البديلة

تأسيسا على ما تقدم، يمكن صياغة فرضية العدم والفرضية البديلة وفقا لأحد الأشكال الثلاثة التالية:

اختبار من طرفين (ذو جانبين أو ذيلين): وتكون صيغة فرضية العدم والفرضية البديلة بالشكل

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

اختبار من الجانب الأيمن أو من الطرف العلوي: وتكون صيغة فرضية العدم والفرضية البديلة بالشكل

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu > \mu_0$$

اختبار من الجانب الأيمن أو من الطرف العلوي: وتكون صيغة فرضية العدم والفرضية البديلة بالشكل

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu < \mu_0$$

ثانيا- تحديد قيمة إحصاءة الاختبار المحسوبة

إحصاءة الاختبار

تعرف إحصاءة الاختبار بأنها متغير عشوائي لها توزيع احتمالي معروف، وتستخدم لوصف العلاقة بين القيم النظرية للمجتمع والقيم المحسوبة من العينة، وتعتمد إحصاءة الاختبار على ما سيتم اختباره من معلمات المجتمع المدروس، لذلك فهي تختلف باختلاف الحالة المدروسة للمعلمة، وتسمى عادة باحصاءة الاختبار المحسوبة، وتكون إحصاءات الاختبار في العموم (وفقا لما سيتم التطرق إليه في هذا المحور) على عدة أنواع نذكر منها إحصاءة الاختبار Z وإحصاءة الاختبار T

ويتم تقسيم كل النتائج الممكن الحصول عليها، أي كل القيم التي يمكن أن تأخذها إحصائية الاختبار لمجموعتين غير متداخلتين، إحداهما تشمل النتائج التي إذا ظهرت نقبل فرضية العدم وتسمى منطقة القبول، والأخرى تشمل النتائج التي إذا ظهرت نرفض فرضية العدم وتسمى منطقة الرفض، وبالتالي يقسم توزيع المعاينة لإحصائية الاختبار إلى منطقتين يمكن تعريفهما كما يلي:

منطقة القبول: هي المنطقة التي تحتوي على قيم إحصائية الاختبار التي تؤدي إلى عدم رفض فرضية العدم، أي قبول فرضية العدم

منطقة الرفض: هي المنطقة التي تحتوي على قيم إحصائية الاختبار التي تؤدي إلى رفض فرضية العدم، وتسمى كذلك بالمنطقة الحرجة. والقيمة أو القيم التي تفصل بين هاتين المنطقتين تسمى بالقيمة أو القيم الحرجة

المنطقة الحرجة: هي المنطقة التي عندها يتم رفض فرضية العدم والتي تقع فيها إحصاءة الاختبار المحسوبة Z_c، بمعنى آخر تعرف المنطقة الحرجة بأنها جزء من المساحة تحت منحنى دالة التوزيع الاحتمالي لإحصاءة الاختبار، حيث إن هذه المساحة تمثل احتمال رفض فرضية العدم عندما تكون هذه الفرضية صحيحة

مما تقدم يتضح بأن مساحة المنطقة تحت منحنى دالة التوزيع الاحتمالي لإحصاءة الاختبار يمثل α في حالة الاختبار من جانب واحد (الأيمن أو الأيسر) أو تمثل $\frac{\alpha}{2}$ في حالة الاختبار من جانبين (بذيلين)

القيمة الحرجة: هي القيمة التي تفصل بين منطقة الرفض ومنطقة القبول، وهي قيم جدولية يتم استخراجها من قيم التوزيع الاحتمالي لإحصاءة الاختبار. وتعطى قيمة إحصاءة الاختبار المحسوبة في حالة ما إذا كان توزيع المعاينة هو التوزيع الطبيعي بالصيغة:

$$Z_c = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ثالثا- تحديد القيمة الجدولية (القيمة الحرجة أو الدرجة المعيارية)

وتحدد - كما سبق ذكره - على حسب نوع الاختبار وقيمة مستوى المعنوية α

نوع الاختبار	مستوى المعنوية	درجة الثقة	الدرجة المعيارية
اختبار بذيلين	$\alpha = 1\%$	$1 - \alpha = 99\%$	$Z\alpha/_2 = 2.58$
	$\alpha = 5\%$	$1 - \alpha = 95\%$	$Z\alpha/_2 = 1.96$
	$\alpha = 10\%$	$1 - \alpha = 90\%$	$Z\alpha/_2 = 1.65$
اختبار بذيل أيمن	$\alpha = 1\%$	$1 - \alpha = 99\%$	$Z_\alpha = 2.33$
	$\alpha = 5\%$	$1 - \alpha = 95\%$	$Z_\alpha = 1.65$
	$\alpha = 10\%$	$1 - \alpha = 90\%$	$Z_\alpha = 1.29$
اختبار بذيل أيسر	$\alpha = 1\%$	$1 - \alpha = 99\%$	$Z_\alpha = -2.33$
	$\alpha = 5\%$	$1 - \alpha = 95\%$	$Z_\alpha = -1.65$
	$\alpha = 10\%$	$1 - \alpha = 90\%$	$Z_\alpha = -1.29$

رابعا- اتخاذ القرار

إذا كان الاختبار من طرفين: نقبل فرضية العدم إذا تحققت المعادلة التالية:

$$-Z\alpha/_2 < Z_c < Z\alpha/_2$$

نرفض فرضية العدم إذا تحققت إحدى المعادلتين

$$-Z\alpha/_2 > Z_c$$

أو

$$Z_c > Z\alpha/_2$$

إذا كان الاختبار من الطرف الأيمن: نقبل فرضية العدم إذا تحققت المعادلة:

$$Z_c < Z_\alpha$$

نرفض فرضية العدم إذا تحققت المعادلة:

$$Z_c > Z_\alpha$$

إذا كان الاختبار من الطرف الأيسر: نقبل فرضية العدم إذا تحققت المعادلة:

$$Z_c > -Z_\alpha$$

نرفض فرضية العدم إذا تحققت المعادلة:

$$Z_c < -Z_\alpha$$

اختبار الفرضية حول المتوسط الحسابي

أولا- عندما يكون تباين المجتمع معلوما

في هذه الحالة، تعطى قيمة إحصاءة الاختبار المحسوبة بالصيغة:

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ثانيا- عندما يكون تباين المجتمع مجهولا وحجم العينة كبير

في هذه الحالة، تعطى قيمة إحصاءة الاختبار المحسوبة بالصيغة:

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

ثالثا- عندما يكون تباين المجتمع مجهولا وحجم العينة صغير

في هذه الحالة، تعطى قيمة إحصاءة الاختبار المحسوبة بالصيغة:

$$T_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$