Cours $1^{ére}$ année Master (2019/2020)

Calcul différentiel dans un espace de Banach

Partie 3 : Intégrales généralisées

- **Convergence et divergence**

Définition : *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b[$, $(b \in \overline{\mathrm{IR}})$ *, si* $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *admet une limite finie lorsque* x *tend vers* b , $x<b$ *, On dit que l'intégrale de* f *sur* $[a,b[$ *, est convergente et on note*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale de f *sur* $[a,b[$ *, est divergente.*

Définition : *Soit* f *une fonction continue sur* $]a,b]$, $(a \in \overline{\mathrm{IR}})$ *, si* $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ *admet une limite finie lorsque* x *tend vers* a , $a<x$ *, On dit que l'intégrale de* f *sur* $]a,b]$ *, est convergente et on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale de f *sur* $]a,b]$ *, est divergente.*

Théorème

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$, avec $a<b$, est convergente si et seulement si $\alpha<1$.

Définition : *Soit* f *une fonction continue sur* $]a,b[$, $(a,b \in \overline{\mathrm{IR}})$ *, et* $c \in]a,b[$.
Si l'intégrale de f *sur* $]a,c]$ *et l'intégrale de* f *sur* $[c,b[$ *convergent, on dit que l'intégrale de* f *sur* $]a,b[$ *converge.*
Dans le cas contraire, elle diverge

- **Convergence des intégrales de fonctions positives**

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b[$. $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si seulement si, $\left(x \mapsto \int_a^x f(t)dt\right)$ est bornée sur $[a,b[$.

Théorème Soit f,g , deux fonctions continue et de même signe sur $[a,b[$. Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

- **Absolue convergence**

Définition : *On dit que l'intégrale de f est absolument convergente sur $[a,b[$. Si l'intégale de $|f|$ est convergente sur $[a,b[$.*

Théorème : Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. Si l'intégrale de f est absolument convergente sur $[a,b[$, elle est convergente sur $[a,b[$.

- **Intégration par parties et changement de variables**

Théorème : Si f et g sont deux fonctions de classes $C^1([a,b[)$, alors:

$$\forall x \in [a,b[\ : \int_a^x f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)dt.$$

Si deux de ces expressions ont une limite finie lorsque x tend vers b , $x < b$, alors la troisième aussi et dans ce cas:

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Théorème : Si ϕ est une bijection croissante de classe $C^1([a,b[)$ sur $[\alpha,\beta[$ et si f est continue sur $[\alpha,\beta[$:

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \text{ et } \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Sont sont de même nature.
S' il y a convergence alors:

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Paramétrisation par abscisse curviligne

Dans cette section, nous allons paramétrer une courbe par sa longueur. Pour expliquer ce que représente cette paramétrisation, on a les définitions suivantes:

Définition : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle courbe paramétrée de classe C^k de $\mathbb{R}^n$*

une application de classe C^k ,

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

où I *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$.
L'ensemble $C = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \in I\}$ *est appelé le support géométrique de*

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n.$$

- On dit que γ *est une courbe parmétrée régulière de classe* C^k *si, pour tout* $t \in I$ *et pour tout* $m \in \{1, 2, ..., k\}$, $\gamma^{(m)}(t) \neq 0$.

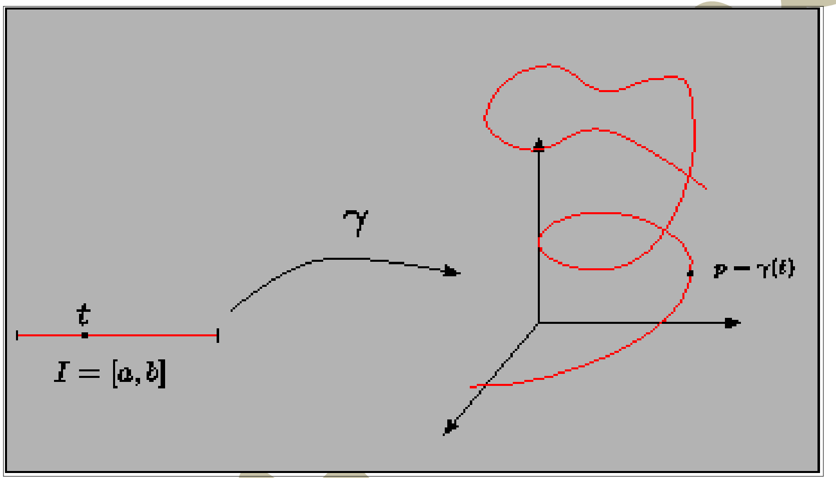


Figure 1: Courbe paramétrée

Il est possible de reparamétrer une courbe. Pour cela, on rappelle la notion de difféomorphisme.

Définition : *Soient* U *et* V *deux domaines ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *. Une application* $f : U \to V$ *est un* C^1 *difféomorphisme si :*

- f *est une bijection de* U *dans* V .
- f *et* f^{-1} *sont toutes les deux de class* C^1 .

Définition : *Soit* γ $I \to \mathbb{R}^n$ *une courbe paramétrée de class* C^1 *et un difféomorphisme* ϕ : $J \to I$ (avec J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) *. Alors* $\gamma \circ \phi : J \to \mathbb{R}^n$ *est une courbe paramétrée qui a exactement le même support géométrique que* γ *. On dit alors que* ϕ *est un changement de variable admissible et que* $\gamma \circ \phi$ *est une reparamétrisation de* γ

.

Définition : *On dit que la paramétrisation d'une courbe* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *est normale* *si,* γ *est une courbe paramétrée de classe* C^1 *et* $\|\gamma'(t)\| = 1$.

Définition : *Une paramétrisation* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *d'une courbe géométrique est dite normale (ou par abscisse curviligne) si pour tout* $[t_1, t_2] \subset I$ *, la longueur de la courbe géométrique entre les points* $\gamma(t_1)$ *et* $\gamma(t_2)$ *est exactement* $[t_1, t_2]$ *:*

$$L_{[t_1,t_2]}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(u)\| du = t_2 - t_1.$$

Définition : *Soit* $\gamma \quad I \to \mathbb{R}^n$ *une courbe paramétrée de classe* C^1 *et* $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ *. L'abscisse curviligne à partir du point de paramètre* t_0 *est la fonction* $S_{t_0} : I \to \mathbb{R}$ *donnée par :*

$$S_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du \text{ pour tout } t \in I$$

Géométriquement, $S_{t_0}(t)$ est la longueur de la courbe géométrique γ entre les points $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t)$. Le résultat suivant nous indique que toute courbe paramétrée régulière de classe C^1 peut être reparamétrée par abscisse curviligne.

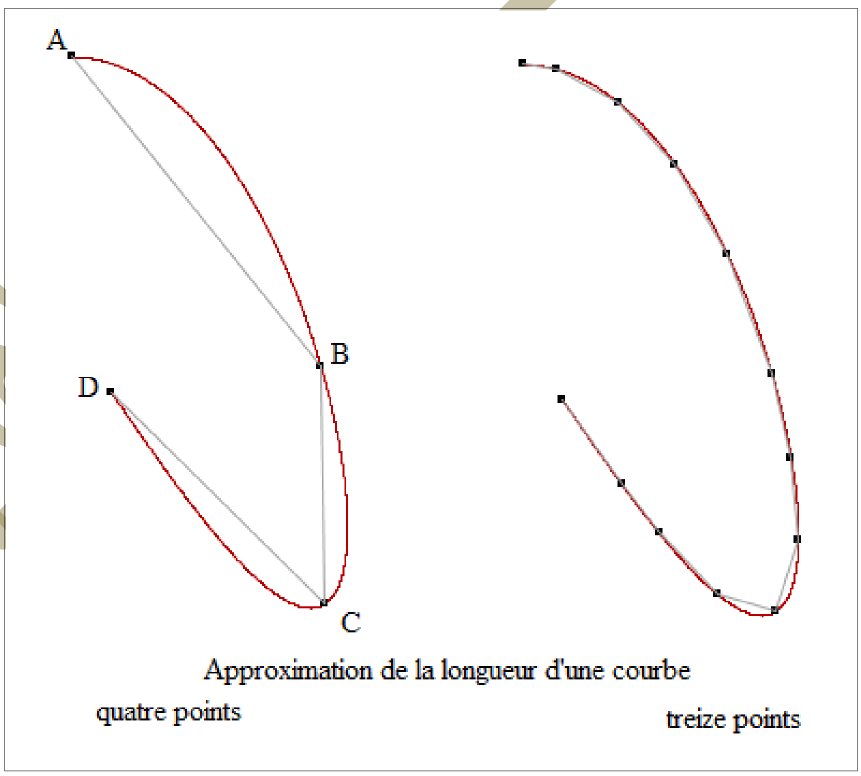


Figure2: Approximation de la longueur d'une courbe

Théorème : Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 et $t_0 \in I$. Alors l'abscisse curviligne $S_{t_0}^{-1} : J \to I$ est un changement de variable admissible et

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ S_{t_0}^{-1} : J \to \mathbb{R}^n,$$

est une paramétrisation normale qui a le même support géométrique que γ.

Proof Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 et $t_0 \in I$. Alors l'abscisse curviligne à partir du point de paramètre t_0 , est

$$S_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du \text{ pour tout } t \in I$$

On pose $J = S_{t_0}(I)$, comme

$$\begin{cases} \|\gamma'(u)\| > 0 \text{ car } \gamma \text{ est une courbe paramétrée régulière de classe } C^1 \\ S_{t_0} \text{ est une fonction strictement croissante} \end{cases}$$

alors S_{t_0} est une fonction inversible de classe C^1 notée par $S_{t_0}^{-1}$.

On pose $\tilde{\gamma} = \gamma \circ S_{t_0}^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ d'où le résultat.

Théorème : Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 , On note $l = L_{[a,b]}(\gamma)$ la longueur de γ . Alors la courbe $\tilde{\gamma} = \gamma \circ S_a^{-1} : [0,l] \to \mathbb{R}^n$, est une reparamétrisation normale de γ .

Proof Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 , On note $l = L_{[a,b]}(\gamma)$ la longueur de γ . Alors la courbe $\tilde{\gamma} = \gamma \circ S_a^{-1} : [0,l] \to \mathbb{R}^n$, on calcule

$$\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(S_a^{-1}(s))(S_a^{-1})'(s) \text{ pour tout } s \in [0,l]$$

Et on a

$$\left\|\tilde{\gamma}'(s)\right\| = \|\gamma'(S_a^{-1}(s))\| \left|(S_a^{-1})'(s)\right| \text{ pour tout } s \in [0,l]$$

D'autre part

$$S_a^{-1}(s) = t \in [a,b] \text{ et } \left|(S_a^{-1})'(s)\right| = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \text{ pour tout } s \in [0,l]$$

ce qui revient à

$$\left\|\tilde{\gamma}'(s)\right\| = 1$$

d'où le résultat.

Série d'exercices

Exercice 1:

Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$, et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ convergente. Prouvez que $l=0$.

Exercice 2:

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,+\infty[$, $a>0$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x)=0$, où $\alpha>1$.

1) Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

2) Applications: étudier la convergence des intégrales:

$$a)-I=\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt.$$

$$b)-J=\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^6} dt.$$

$$c)-K=\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

$$d)-M=\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^3} dt.$$

Exercice 3:

Pour quelles valeurs de α et β l'intégrale est-elle converge ?

$$a)-I=\int_1^{+\infty} t^{\beta} e^{\alpha t} dt.$$

$$b)-J=\int_0^{+\infty} \frac{t^{\beta}}{1+t^{\alpha}} dt.$$

$$c)-K=\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha}\ln t}{1+t^{2\alpha}} dt.$$

$$d)-M=\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{\alpha t}}{t^{\beta}} dt.$$

Exercice 4:

On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\int_0^1 \ln(1+xt)dt.$$

1) Justifier que f est définie pour $x \in]-1,+\infty[$.

2) Montrer que $\int_0^1 \ln(1-t)dt$, est convergente et déterminer sa valeur.

3) Montrer que f est continue sur $[-1,+\infty[$.

Exercice 5:

Soit γ est une courbe régulière définie sur l'interval $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, donner la longueur dans les cas suvants

1) γ est définie par un paramétrage polaire comme suit $\gamma(t)=(r(t),\theta(t))$, $t \in [a,b]$.

2) γ est définie par une équation polaire $r = f(\theta)$, $t \in [a,b]$.

3) γ est définie par

$$\gamma(t)=\left(x_1\left(u_1^1(t),...,u_n^1(t)\right), x_2\left(u_1^2(t),...,u_n^2(t)\right),..., x_n\left(u_1^n(t),...,u_n^n(t)\right)\right)$$

où U^i est une courbe de classe C^1 , $U^i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ définée par $U^i(t)=\left(u_1^i(t),...,u_n^i(t)\right)$, pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$

Exercice 6:

Calculer la longueur de l'arc de parabole $y = x^2$ entre les points $(0,0)$ et $(0,1)$.

Corrigé des éxercices

Exercice 1:

Raisonons par l'absurde: $l \neq 0$, on suppose que $l > 0$.

Dans ce cas: $\exists A > a$, tel que pour $x \geq A$, $|f(x) - l| < \frac{l}{2}$, donc $0 \leq \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}$.

Or $\int_{A}^{+\infty} \frac{l}{2} dt$ est divergente, donc $\int_{A}^{+\infty} f(t) dt$, diverge ainsi que $\int_{a}^{+\infty} f(t) dt$.

Ceci est contraire à l'hupothèse. Donc on ne peut pas avoir $l > 0$.

Si $l < 0$, on considère la fonction $(-f)$ et on obtient de même, que $(l < 0)$ est absurde.

Ainsi $l = 0$.

Finalement, si $\int_{a}^{+\infty} f(t) dt$ converge et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors $l = 0$.

Exercice 2:

1) Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{\alpha} f(x)\right) = 0$, il éxiste $A \geq a$, tel que $|x^{\alpha} f(x)| < 1$ pour $x \geq A > a > 0$. On a:

$$2)\quad x^{\alpha} f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) < \frac{1}{x^{\alpha}}$$

3) Donc $0 \leq f(x) < \frac{1}{x^{\alpha}}$ pour $x \geq A$, et comme $\int_{A}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$, converge car $\alpha > 1$, on en déduit que $\int_{A}^{+\infty} f(x) dx$, converge. Finalement $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$.

4) Applications:

$a) -$ $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{5} e^{-t} = 0$, donc en posant $\alpha = 2$, on reccouvre

$$\int_{0}^{+\infty} t^{3} e^{-t} dt = \int_{0}^{1} t^{3} e^{-t} dt + \int_{1}^{+\infty} t^{3} e^{-t} dt \text{ converge.}$$

$b) -$ $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{6} \frac{e^{-t}}{t^{6}} = 0$, donc en posant $\alpha = 6$, on reccouvre $\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{6}} dt$ converge.

$c) -$ $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{\alpha} e^{-t^{2}} = 0$, pour $\alpha > 1$, donc $\int_{0}^{+\infty} e^{-t^{2}} dt$ converge.

$d) -$ $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{2} \frac{|\sin t|}{t^{3}} = 0$, donc en posant $\alpha = 2$, on reccouvre $\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{3}} dt$ converge.

Exercice 3:

$a) -$ Si $\alpha > 0$, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{\beta} e^{\alpha t} = +\infty$, alors $\int_{1}^{+\infty} t^{\beta} e^{\alpha t} dt$ diverge.

Si $\alpha = 0$, alors

$$\int_1^{+\infty} t^\beta e^{\alpha t}dt = \int_1^{+\infty} t^\beta dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{-\beta}}dt \text{ converge pour } \beta < 1$$

Si $\alpha < 0$, on a $\lim_{t\to+\infty}\left(t^2\left(t^\beta e^{\alpha t}\right)\right)=0$, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, donc $\int_1^{+\infty} t^\beta e^{\alpha t}dt$ converge.

Finalement

$$\int_1^{+\infty} t^\beta e^{\alpha t}dt \text{ converge} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ et } \beta < 1) \text{ ou } (\alpha < 0)$$

$b)-$ La fonction $t \mapsto \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Distinguons les cas:

$1)-$ Si $\alpha > 0$,

- $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} \underset{0}{\sim} t^\beta$, avec $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha}$ et t^β positifs, d'où:

$$\int_0^1 \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}dt \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > -1.$$

- $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} t^{\beta-\alpha}$, avec $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha}$ et $t^{\beta-\alpha}$ positifs, d'où:

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}dt \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > \beta + 1.$$

- Donc: Si $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}dt$, converge si, seulement si, $\beta > -1$.

$2)-$ Si $\alpha = 0$,

- $\int_0^1 \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^\beta dt$, converge $\Leftrightarrow \beta > -1$.
- $\int_1^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} t^\beta dt$, converge $\Leftrightarrow \beta < -1$.

$3)-$ Si $\alpha < 0$,

- $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} \underset{0}{\sim} t^{\beta-\alpha}$, avec $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha}$ et $t^{\beta-\alpha}$ positifs, d'où:

$$\int_0^1 \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}dt \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > \alpha - 1.$$

- $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} t^\beta$, avec $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha}$ et t^β positifs, d'où:

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}dt \text{ converge} \Leftrightarrow \beta < -1.$$

- Donc: Si $\alpha < 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}dt$, converge si, seulement si, $\beta < -1$.

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}\,dt \text{ converge} \Leftrightarrow (\alpha>0 \text{ et } \beta>-1) \text{ ou } (\alpha<0 \text{ et } \alpha-1<\beta<-1)$$

$c)-$ La fonction $t \mapsto \frac{t^\alpha \ln t}{1+t^{2\alpha}}$

$1)-$ Si $\alpha>0$,

- La fonction $t \mapsto \frac{t^\alpha \ln t}{1+t^{2\alpha}}$ est prolongée par continuité sur $[0,1]$, car $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t^\alpha \ln t}{1+t^{2\alpha}}=0$.

  D'où l'éxistence de $\int_0^1 \frac{t^\alpha \ln t}{1+t^{2\alpha}}\,dt$.

- $\frac{t^\alpha \ln t}{1+t^{2\alpha}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^\alpha}$, avec $\frac{t^\alpha \ln t}{1+t^{2\alpha}}$ et $\frac{\ln t}{t^\alpha}$ positifs pour $t\in[1,+\infty[$, d'où:

$$\text{si } \alpha\neq 1,\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}\,dt=\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\ln t\right]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{(-\alpha+1)t^\alpha}\,dt \text{ converge pour } \alpha>1.$$

$$\text{si } \alpha=1,\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,dt=\left[(\ln t)^2\right]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt \text{ diverge.}$$

$2)-$ Si $\alpha=0$,

- $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{2}\,dt$ diverge .

$3)-$ Si $\alpha<0$,

- $\frac{t^\alpha \ln t}{1+t^{2\alpha}}=\frac{t^{-\alpha}\ln t}{1+t^{-2\alpha}}$ est prolongée par continuité sur $[0,1]$, car $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^{-\alpha}\ln t}{1+t^{-2\alpha}}=0$. D'où

  l'éxistence de $\int_0^1 \frac{t^\alpha \ln t}{1+t^{2\alpha}}\,dt$.

- $\frac{t^\alpha \ln t}{1+t^{2\alpha}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^{-\alpha}}$, avec $\frac{t^\alpha \ln t}{1+t^{2\alpha}}$ et $\frac{\ln t}{t^{-\alpha}}$ positifs pour $t\in[1,+\infty[$, d'où:

$$\text{si } -\alpha\neq 1,\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{-\alpha}}\,dt=\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln t\right]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{(\alpha+1)t^{-\alpha}}\,dt \text{ converge pour } \alpha<-1.$$

$$\text{si } -\alpha=1,\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,dt=\left[(\ln t)^2\right]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt \text{ diverge.}$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha \ln t}{1+t^{2\alpha}}\,dt \text{ converge} \Leftrightarrow (\alpha>1) \text{ ou } (\alpha<-1)$$

$d)-$ La fonction $t\mapsto \frac{1-e^{\alpha t}}{t^\beta}$

$1)-$ Si $\alpha=0$,

- La fonction $t\mapsto \frac{1-e^{\alpha t}}{t^\beta}=0$. D'où l'éxistence de $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{\alpha t}}{t^\beta}\,dt=0$.

$2)-$ Si $\alpha>0$,

- $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1-e^{\alpha t}}{t^{\beta}}=-\infty$. Donc de $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{\alpha t}}{t^{\beta}}dt=\int_0^{1}\frac{1-e^{\alpha t}}{t^{\beta}}dt+\int_1^{+\infty}\frac{1-e^{\alpha t}}{t^{\beta}}dt$ (même signe) diverge.

3) − Si $\alpha<0$,

- $\frac{1-e^{\alpha t}}{t^{\beta}}\underset{0}{\sim}\frac{-\alpha}{t^{\beta-1}}$., avec $\frac{1-e^{\alpha t}}{t^{\beta}}$ et $\frac{-\alpha}{t^{\beta-1}}$ positifs pour $t\in[1,+\infty[$, d'où:

$$\int_0^{1}\frac{-\alpha}{t^{\beta-1}}dt \text{ converge pour } \beta<2.$$

- $\frac{1-e^{\alpha t}}{t^{\beta}}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{\beta}}$., avec $\frac{1-e^{\alpha t}}{t^{\beta}}$ et $\frac{1}{t^{\beta}}$ positifs, d'où:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{\beta}}dt \text{ converge pour } \beta>1.$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{\alpha t}}{t^{\beta}}dt \text{ converge} \Leftrightarrow (\alpha=0)ou(\alpha<0 \text{ et } 1<\beta<2)$$

Exercice 4:

1) $\forall x\in]-1,+\infty[$, $\forall t\in[0,1]$, on a: $-1\le xt$, d'où $1+xt>0$, ce qui montre que la fonction $t\mapsto\ln(1+xt)$, est continue sur $[0,1]$ d'où l'existence de $f(x)$ pour tout $x\in]-1,+\infty[$.

2) Soit $\varepsilon\in]0,1[$, la fonction $t\mapsto\ln(1-t)$, est continue sur $[0,1-\varepsilon]$, et:

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\varepsilon}\ln(1-t)dt &= [t\ln(1-t)]_0^{1-\varepsilon}+\int_0^{1-\varepsilon}\tfrac{t}{1-t}dt\\ &=(1-\varepsilon)\ln\varepsilon+[-t-\ln(1-t)]_0^{1-\varepsilon}\\ &=(1-\varepsilon)\ln\varepsilon-(1-\varepsilon)-\ln\varepsilon\\ &=\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon\end{aligned}$$

donc $\int_0^1\ln(1-t)dt=-1$ ce qui prouve que $\int_0^1\ln(1-t)dt$ est converge.

3) $\forall x\in]-1,+\infty[/\{0\}$, On peut utiliser l'intégrale par partie et on a

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^1\ln(1+xt)dt\\ &=[t\ln(1+xt)]_0^1-\int_0^1\tfrac{xt}{1+xt}dt\\ &=\ln(1+x)-\left[1-\int_0^1\tfrac{1}{1+xt}dt\right]\\ &=-1+\ln(1+x)+\left[\tfrac{1}{x}\ln(1+xt)\right]_0^1\\ &=-1+\left(\tfrac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)\end{aligned}$$

et on a $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, autre part $f(0)=\int_0^1 0dt=0$. donc f continue au point $x_0=0$.

et on a $\lim\limits_{\substack{x>-1 \\ x\to -1}} f(x) = -1$, autre part $f(-1) = \int_0^1 \ln(1-t)\,dt = -1$. donc f continue au point $x_0 = -1$.

Donc f continue sur $[-1,+\infty[$.

Exercice 5:

On a la longueur de γ sur $[a,b]$, définie par:

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{dt}(t)\right)^2}\,dt$$

1- γ est définie par un paramétrage polaire comme suit $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$, $t \in [a,b]$, on a

$$x(t) = r(t)\cos(t)$$
$$y(t) = r(t)\sin(t)$$

et

$$x'(t) = r'(t)\cos(t) - r(t)\sin(t)$$
$$y'(t) = r'(t)\sin(t) + r(t)\cos(t)$$

alors

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t)\theta'(t))^2}$$

donc

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t)\theta'(t))^2}\,dt$$

2- γ est définie par une équation polaire $r = f(\theta)$, $t \in [a,b]$. On a pour γ est définie par un paramétrage polaire comme suit $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$, $t \in [a,b]$, on a

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t)\theta'(t))^2}\,dt$$

On calcule

$$\frac{dr}{dt}(t) = \frac{dr}{d\theta}(\theta(t))\theta'(t) = f'(\theta(t))\theta'(t) = r'(\theta)\theta'(t)$$

alors

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}\,|\theta'(t)|\,dt$$

D'autre part, si pout $t \in [a,b]$, on a $\theta \in [c,d]$ alors

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_c^d \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}\,d\theta$$

3- γ est définie par

$$\gamma(t)=\left(x_1\left(u_1^1(t),\dots,u_n^1(t)\right),x_2\left(u_1^2(t),\dots,u_n^2(t)\right),\dots,x_n\left(u_1^n(t),\dots,u_n^n(t)\right)\right)$$

où U^i est une courbe de classe C^1, $U^i : [a,b]\to\mathbb{R}^n$ définée par $U^i(t)=\left(u_1^i(t),\dots,u_n^i(t)\right)$, pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$, on a:

$$\frac{dx_i}{dt}(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{dx_i}{du_j}\left(u_j(t)\right)\frac{du_j}{dt}(t),\ \text{où}\ u_j(t)=\left(u_1^j(t),\dots,u_n^j(t)\right),\ \text{pour tout}\ j\in\{1,2,\dots,n\}.$$

Alors

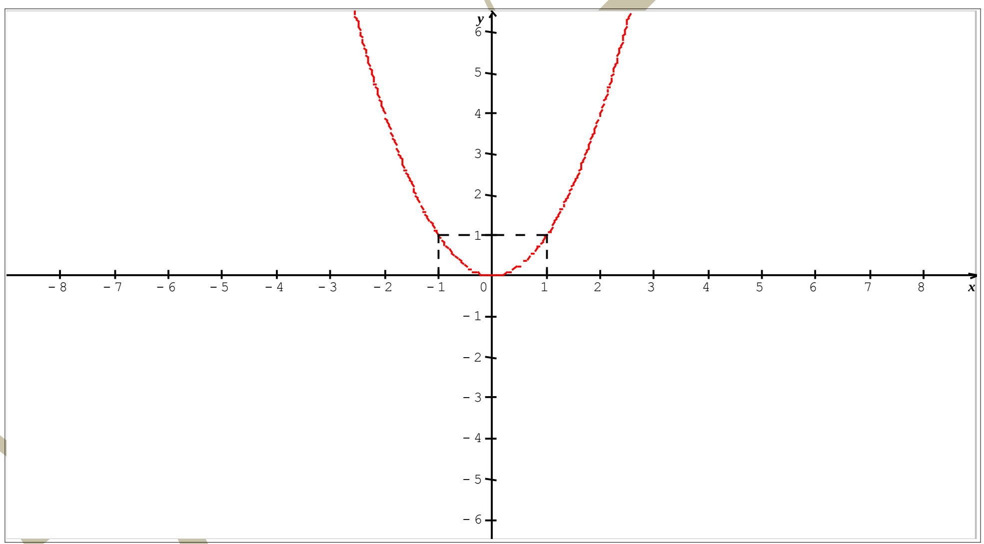
$$L_{[a,b]}(\gamma)=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{dt}(t)\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{dx_i}{du_j}\left(u_j(t)\right)\frac{du_j}{dt}(t)\right)^2}\,dt$$

Exercice 6:

On a

$$C=\left\{\gamma(t)\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R}\right\},\ \text{telque}\ \gamma(t)=(t,t^2)$$

le point $(0,0)\in C$ mais $(0,1)\notin C$ on résout l'équation $t^2=1$ alors $t=-1$ où $t=+1$,



Alors

$$\begin{aligned}L_{[-1,1]}(\gamma)&=\int_{-1}^{1}\|\gamma'(t)\|\,dt\\&=\int_{-1}^{1}\sqrt{(2t)^2+1^2}\,dt\\&=\int_{-1}^{1}\sqrt{4t^2+1}\,dt\end{aligned}$$

on pose $t=\frac{sh(u)}{2}$, alors $dt=\frac{ch(u)}{2}du$ et pour $t\in[-1,1]$ on a $u\in[u_1,u_2]$ donc

$$
\begin{aligned}
L_{[-1,1]}(\gamma) &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{4\left(\frac{sh(u)}{2}\right)^2 + 1}\ \frac{ch(u)}{2}\, du \\
&= \int_{u_1}^{u_2} ch(u)\frac{ch(u)}{2}\, du \\
&= \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} ch^2(u)\, du \\
&= \frac{1}{8}\int_{u_1}^{u_2} \left(e^{2u} + e^{-2u} + 2\right) du \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{e^{2u}}{2} - \frac{e^{-2u}}{2} + 2u\right]_{u_1}^{u_2} \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{e^{2\arg sh(t)}}{2} - \frac{e^{-2\arg sh(t)}}{2} + 2\arg sh(t)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{16}\left[\left(e^{2\arg sh(1)} - e^{-2\arg sh(1)} + 4\arg sh(1)\right) - \left(e^{2\arg sh(-1)} - e^{-2\arg sh(-1)} + 4\arg sh(-1)\right)\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[2sh2\arg sh(1) - 2sh2\arg sh(-1) + 4\arg sh(1) - 4\arg sh(-1)\right] \\
&= \frac{sh2\arg sh(1) - sh2\arg sh(-1)}{8} + \frac{\arg sh(1) - \arg sh(-1)}{4}
\end{aligned}
$$