

3 Critère de Mohr-Coulomb

Le critère de Mohr-Coulomb est utilisé pour les sols pulvérulents (sables) et pour les sols cohérents à long terme (argiles et limons). Le critère de Tresca est un cas particulier du critère de Mohr-Coulomb.

La surface de charge $f(\sigma_{ij})$ s'exprime de la façon suivante :

$$f(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin\phi - 2c \cos\phi = 0$$

où σ_1 et σ_3 représentent les contraintes principales extrêmes ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

Le paramètre c est la cohésion du matériau et ϕ l'angle de frottement interne. Lorsque $\phi = 0$, on retrouve le critère de Tresca.

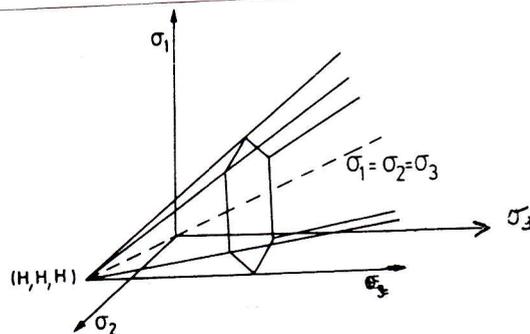


Figure 3.1 Représentation de la surface de charge de Mohr Coulomb Dans 3D

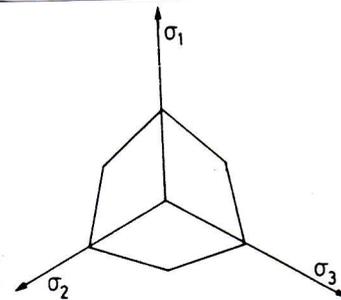


Figure 3.2 Représentation de la surface de charge de Mohr Coulomb Dans le Plan π des déviateurs des contraintes

4 Critère de Drucker-Prager

Le critère de Drucker-Prager constitue une généralisation du critère de Von Mises aux matériaux pulvérulents, prenant en compte le premier invariant du tenseur de contraintes I_1 et le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques J_2 . Son expression est la suivante :

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k = 0$$

où α et k sont deux paramètres qui peuvent être déterminés à partir de résultats d'essais. Si le paramètre α est nul, la loi se réduit à celle de Von Mises.

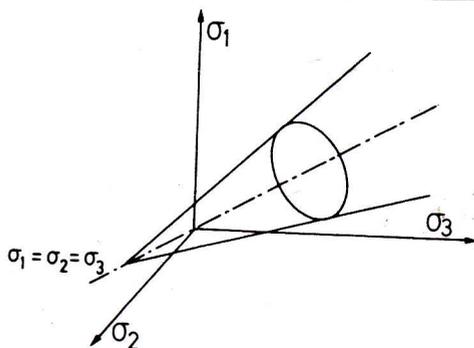


Figure 4.1 Représentation de la surface de charge de Drucker-Prager Dans 3D

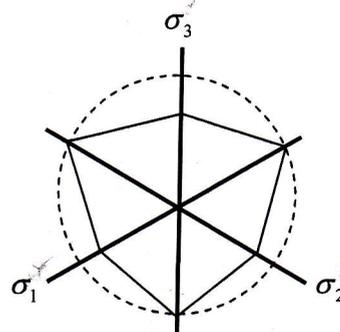


Figure 4.2 Représentation de la surface de charge de Drucker-Prager Dans le Plan π des déviateurs des contraintes

2.5 Modèle modifié de Cam Clay

Des chercheurs de l'Université de Cambridge ont formulé les premiers modèles décrivant le comportement des sols mous: les modèles de Cam clay et le modèle modifié de Cam Clay (Roscoe et Burland, 1968, Schofield et Wroth, 1968). Les deux modèles sont capables de décrire le comportement contrainte-déformation des sols; En particulier, les modèles de prédiction de la pression du sol et de la compression et de la dilatance (Changement de volume) causé par le cisaillement. Parce que les modèles sont basés sur la théorie de l'état critique, ils prédisent tous les deux des déformations illimitées du sol sans changement de contrainte ou de volume lorsque l'état critique est atteint. La description suivante est limitée au modèle Cam Clay modifié.

Le sol est composé de solides, de liquides et de gaz. Le modèle Cam Clay suppose que les vides entre les particules solides ne sont remplis que d'eau (c'est-à-dire que le sol est complètement saturé). Lorsque le sol est chargé, des changements importants de volume irréversibles (plastiques) se produisent, en raison de l'eau qui est expulsée des vides. Une prédiction réaliste de ces déformations est cruciale pour de nombreux problèmes d'ingénierie géotechnique. Les formulations du modèle modifié de Cam Clay sont basées sur la théorie de plasticité, à travers laquelle il est possible de prévoir de façon réaliste des changements de volume dus à différents types de chargement.

Dans la théorie de l'état critique, l'état d'un spécimen de sol est caractérisé par trois Paramètres : la contrainte effective moyenne p' , le déviateur q , et l'indice des vides e .

La contrainte effective moyenne peut être calculée en termes de contrainte effective principale: σ'_1, σ'_2 et σ'_3 comme :

$$p' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3}{3}$$

1

et la contrainte de cisaillement est définie comme

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_1 - \sigma'_3)^2}$$

2

Pour l'étape de consolidation de l'essai triaxial consolidé drainé, nous avons $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3$; avec σ'_3 est la pression de confinement; donc

$$p' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3}{3} = \frac{3\sigma'_3}{3} = \sigma'_3$$

3

et

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_1 - \sigma'_3)^2} = 0$$

4

Pour l'étape de cisaillement d'un essai de compression triaxial, on a $\sigma'_1 \neq \sigma'_2 = \sigma'_3$; donc

$$p' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3}{3} = \frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_3}{3}$$

5

et

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_1 - \sigma'_3)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2(\sigma'_1 - \sigma'_3)^2} = \sigma'_1 - \sigma'_3$$

6

On note que dans l'essai triaxial, la contrainte de cisaillement $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ est appelée contrainte déviatorique ou déviateur.

Le chemin de contrainte effective d'un essai triaxial représente le lieu de l'état de contrainte dans le plan p' - q

Le chemin de contrainte effective peut être facilement calculé à partir des résultats d'un essai triaxial utilisant (5) et (6). Pour l'essai triaxial consolidé drainé, le chemin de contrainte effective est une droite dont la pente est définie comme :

$$\text{Pente} = \frac{\Delta q}{\Delta p'}$$

Comme σ'_3 est constante et utilisant 6, nous avons :

$$\Delta q = \Delta \sigma'_1 - \Delta \sigma'_3 = \Delta \sigma'_1 - 0 = \Delta \sigma'_1$$

de l'équation (6), nous avons :

$$\Delta p' = \frac{\Delta \sigma'_1 + 2\Delta \sigma'_3}{3} = \frac{\Delta \sigma'_1 + 0}{3} = \frac{\Delta \sigma'_1}{3}$$

Alors :

$$\text{Pente} = \frac{\Delta \sigma'_1}{\Delta \sigma'_1/3} = 3$$

2.5.1 Ligne de consolidation normale et lignes de Chargement-déchargement

Les caractéristiques de consolidation d'un sol peuvent être mesurées en laboratoire en utilisant un essai de consolidation unidimensionnelle ou un essai de consolidation isotrope. Un essai de consolidation unidimensionnelle implique un spécimen de sol cylindrique confiné dans un anneau rigide et soumis à une pression normale. La pression normale est augmentée par étapes, chaque étape se termine une fois que l'excès de pression d'eau interstitielle est dissipé ($\Delta u = 0$). Les résultats d'un essai de consolidation unidimensionnelle sont généralement présentés dans le plan e - $\log \sigma'_v$ comme le montre la figure 2.5a, où e est l'indice des vides et σ'_v est la contrainte effective verticale.

En référence à la figure 2.5a, définissons une pression de préconsolidation, σ'_c comme la pression maximale exercée dans le passé sur l'échantillon d'argile. Une argile normalement consolidée (NC) est définie comme une argile qui a une contrainte verticale effective (in situ) σ'_0 égale à sa pression de préconsolidation σ'_c .

Une argile surconsolidée (OC) est définie comme une argile qui présente une contrainte effective verticale inférieure à la contrainte de préconsolidation σ'_c . Enfin, définissons un rapport de surconsolidation, $\text{OCR} = \sigma'_c / \sigma'_0$.

Par exemple, soit $\sigma'_c = 100\text{kPa}$ et $\sigma'_0 = 50\text{kPa}$, $\text{OCR} = 100/50 = 2$.

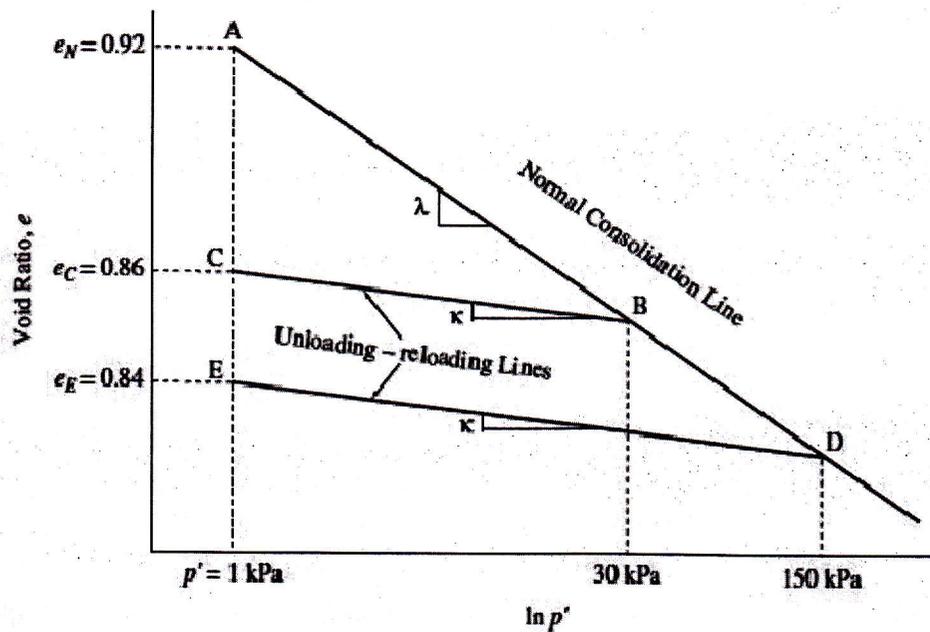


Figure 1 Courbe de consolidation: $e-\ln(p')$

2.6 Modèle de Camclay modifié

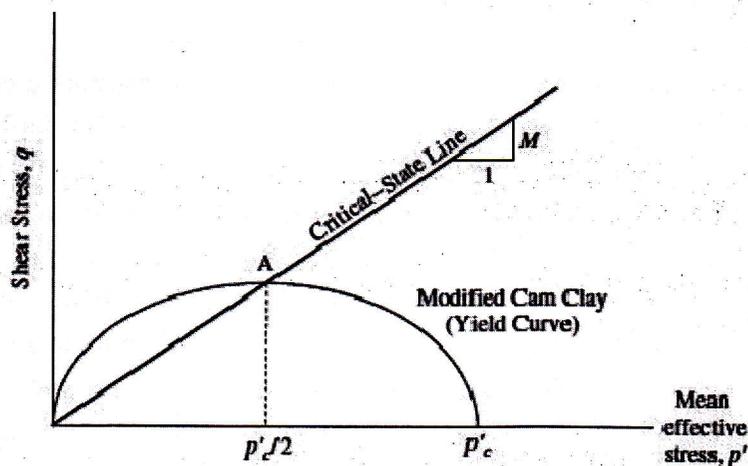


Figure 2 Surface de charge dans le modèle de Camclay modifié dans le plan $p'-q$

La pente de la ligne d'état critique dans le plan $p'-q$, peut être calculée par:

$$M = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'}$$

7

La ligne d'état critique a l'équation suivante dans le plan $p'-q$:

$$q_f = M p'_f$$

8

Cette dernière équation a le même sens que le critère de rupture de Mohr-Coulomb.

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan \phi'$$

9

2.6.1 Fonction de Charge

Dans le plan p' - q , la surface de charge du modèle de Camclay modifié est une ellipse d'équation:

$$\frac{q^2}{p'^2} + M^2 \left(1 - \frac{p'_c}{p'}\right) = 0$$

10

La figure 2 montre une surface de charge elliptique correspondant à une contrainte de préconsolidation p'_c . Le paramètre p'_c contrôle la taille de la surface de charge et est différent pour chaque ligne de déchargement-rechargement. Le paramètre p'_c est utilisé pour définir le comportement d'écroûissage du sol. Le comportement est élastique jusqu'à ce que l'état de contrainte du spécimen du sol (p',q) touche la surface de charge. Alors, le sol se comporte plastiquement. On peut noter que la ligne d'état critique coupe la surface de charge au point A

(Figure 2), ayant la valeur maximale de q . On peut noter aussi que la valeur de $p' = p'_c/2$.

2.6.2 Comportement d'écroûissage

Considérons un spécimen du sol qui est consolidé isotropiquement à une contrainte effective moyenne p'_c et ensuite est déchargé légèrement p'_0 comme le montre la figure 3a. Ici la p'_c est la contrainte de préconsolidation et p'_0 est la contrainte actuelle. La taille de la surface de charge initiale est déterminée par p'_c . On peut noter que le sol est légèrement surconsolidé tel que $OCR = p'_c/p'_0 < 2$. Ensuite, commençons le cisaillement du spécimen sous les conditions drainées. Le chemin de contrainte effective est une droite de pente 3:1. Si le chemin de contrainte touche la surface de charge initiale à droite du point où LEC coupe la surface de charge, le comportement d'écroûissage, accompagné par une compression, se produira. Ce côté de la surface de charge est *le côté sec* comme il est indiqué dans la figure 3a.

durant le cisaillement, le spécimen du sol soutient seulement des déformations élastiques dans la surface de charge initiale. Quand l'état de contrainte du sol touche la surface de charge, le spécimen soutiendra des déformations plastiques aussi bien que des déformations élastiques. La surface de charge s'étendra (écroûissage), causant déformations élastiques supplémentaires, jusqu'à ce que l'état de contrainte du spécimen touche la ligne de l'état critique au point F où la rupture a lieu; le sol continuera à déformer sans changements dans la contrainte de cisaillement ou le volume. La Figure 3b montre le comportement d'écroûissage de contrainte-déformation pour des argiles normalement consolidées et légèrement surconsolidées.

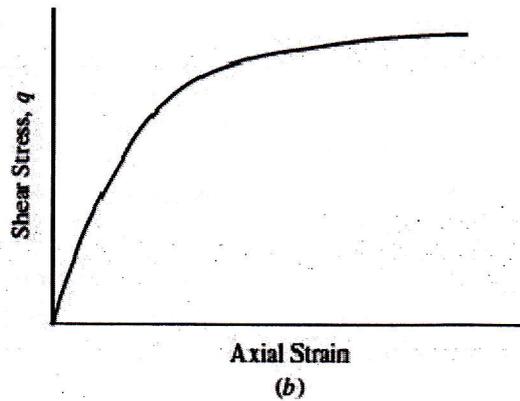
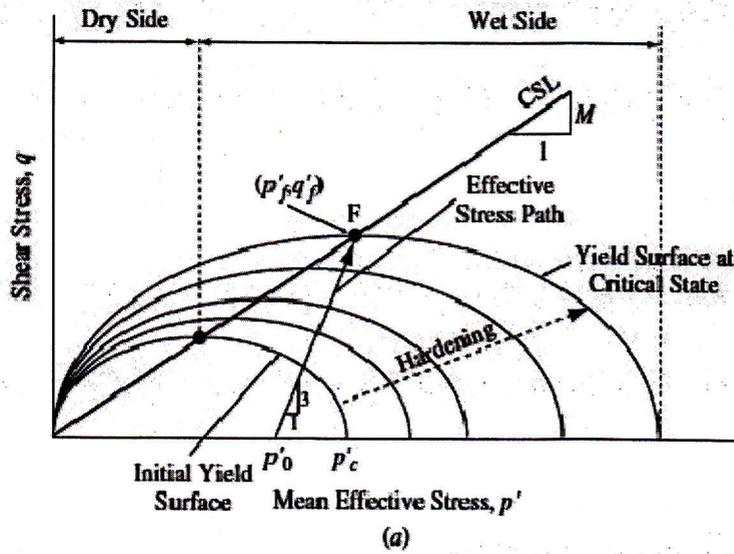


Figure 3 Comportement d'érouissage de Camclay: (a) évolution de la surface de charge durant l'érouissage; (b) courbe contrainte-déformation avec érouissage de déformation

2.6.3 Les modules d'élasticité

$$E = 3K(1 - 2\nu)$$

11

$$G = \frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$$

12

$$K = \frac{(1 + e_0)p'}{\kappa}$$

13

$$E = \frac{3(1 - 2\nu)(1 + e_0)p'}{\kappa}$$

15

$$G = \frac{3(1 - 2\nu)(1 + e_0)p'}{2(1 + \nu)\kappa}$$

16

2.6.4 Déformations plastiques incrémentales

Dans le développement du modèle de Camclay, Roscoe et Burland (1968) ont supposé que le travail fait par une charge q, p' sur un spécimen du sol est donné par:

$$dW = p' d\varepsilon_v^p + q d\varepsilon_s^p \quad 17$$

Où $d\varepsilon_v^p$ est l'incrément de déformation volumétrique plastique (irréversible) et $d\varepsilon_s^p$ est l'incrément de déformation de cisaillement plastique (aussi irréversible).

Dans l'état de contrainte triaxial, $d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_1^p + 2d\varepsilon_3^p$ et $d\varepsilon_s^p = 2/3(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p)$

p' et q sont données par les équations (5) et (6), respectivement.

Roscoe et Burland (1968) ont développé une règle d'écoulement associée donnée par:

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad 18$$

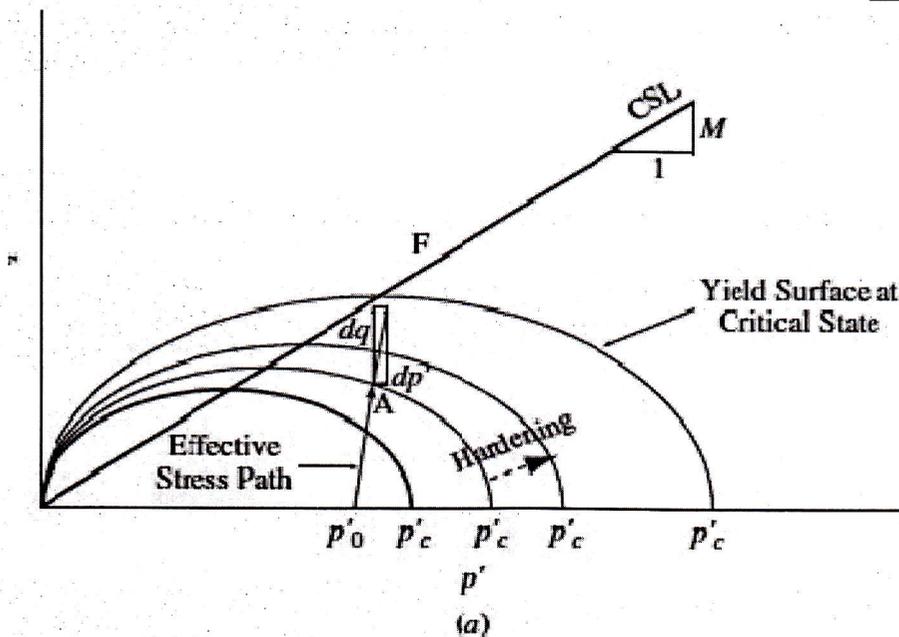
Où $\eta = q/p'$, est le rapport de contrainte. Noter que η est égale à M quand $q = q_f$ et $p' = p'_f$ (à la rupture). Dans le modèle de Camclay modifié, l'incrément de déformation plastique résultant de l'incrément de charge $d\eta = dq/dp'$, montré dans la figure 4a, est normal à la

surface de charge comme le montre la figure 4b. Cela est connu sous le nom de la règle normalité.

Ensuite, nous présentons les équations pour les incréments de déformations causés par l'incrément de contrainte $d\eta = dq/dp'$. Ces équations nous permettent de calculer l'incrément

de déformation volumétrique plastique $d\varepsilon_v^p$, l'incrément de déformation volumétrique élastique $d\varepsilon_v^e$, l'incrément de déformation de cisaillement plastique $d\varepsilon_s^p$, et l'incrément de déformation de cisaillement élastique $d\varepsilon_s^e$. Noter que le l'incrément de déformation volumétrique total est donné par:

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^e + d\varepsilon_v^p \quad 19$$



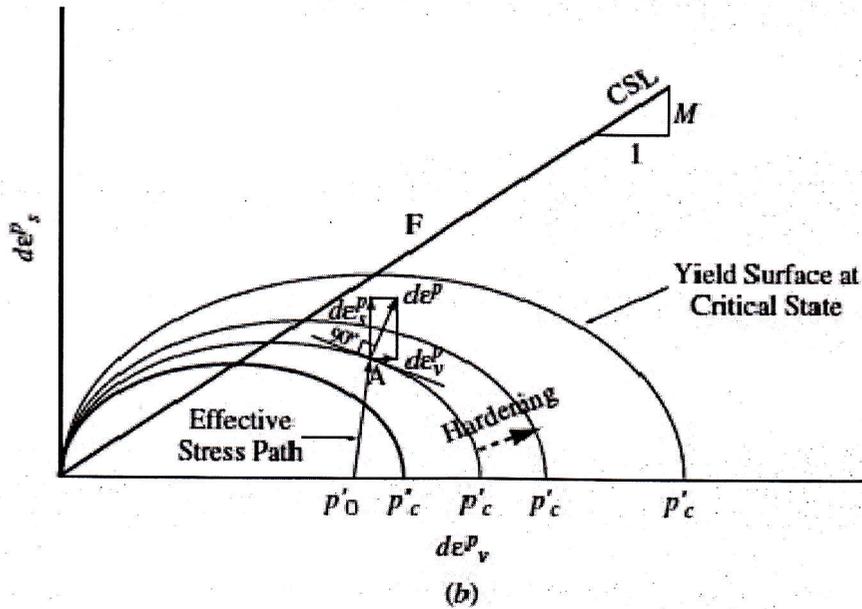


Figure 4 Détermination d'un incrément plastique: (a) incrément de charge; direction de l'incrément de déformation plastique (règle de normalité)

et l'incrément total de déformation de cisaillement est donné par:

$$d\varepsilon_s = d\varepsilon_s^e + d\varepsilon_s^p$$

20

Pour la simplicité, la théorie d'état critique suppose qu'aucune énergie récupérable n'est associée avec distorsion de cisaillement ($d\varepsilon_s^e = 0$). Alors, l'équation (20) se réduit à

$$d\varepsilon_s = d\varepsilon_s^p$$

Il est important de noter que les équations suivantes sont données sous formes incrémentales et doivent être utilisées sous une manière incrémentale. La charge doit être appliquée sous forme de petits incréments et les incréments de déformations correspondants sont calculés. Les incréments de déformation sont accumulés pour nous donner la déformation totale.

Déformations Volumétriques

l'incrément de déformation plastique

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \left(\frac{dp'}{p'} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right)$$

21

l'incrément de déformation élastique

$$d\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{1 + e} \frac{dp'}{p'}$$

22

Alors l'incrément total de déformation volumétrique

$$d\varepsilon_v = \frac{\lambda}{1 + e} \left[\frac{dp'}{p'} + \left(1 - \frac{\kappa}{\lambda} \right) \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right]$$

23

Déformation de cisaillement

$$d\varepsilon_s = d\varepsilon_s^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \left(\frac{dp'}{p'} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \quad \boxed{24}$$

ou bien

$$d\varepsilon_s = d\varepsilon_s^p = d\varepsilon_v^p \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \quad \boxed{25}$$

2.6.5 Procédure de calcul pas à pas pour un essai triaxial CD sur des argiles NC

Etape 1: $p' = p'_0 = \sigma'_3$, $p'_0 + \Delta p'$, $p'_0 + 2\Delta p'$, $p'_0 + 3\Delta p'$... p'_f

$p'_0 = \sigma'_3 = 206.7 \text{ kPa}$, $\Delta p' = 7.2 \text{ kPa}$ [Colonne (1)]

Puisque $\Delta q = 3 \Delta p'$, $q = 0$, $3\Delta p'$, $6\Delta p'$, $9\Delta p'$... q_f , avec $q_f = Mp'_f$ [Colonne (2)]

Etape 2: Calculer le rapport $\eta = q/p'$ pour chaque ligne [Colonne (3)]

Etape 3: Calculer l'incrément du rapport de contrainte $d\eta = \eta_i - \eta_{i-1}$ avec i la ligne actuelle et $i-1$ la ligne précédente [Colonne (4)]

Etape 4: Calculer l'incrément total volumétrique

$$d\varepsilon_v = \frac{\lambda}{1 + e} \left[\frac{dp'}{p'} + \left(1 - \frac{\kappa}{\lambda} \right) \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right]$$

Dans cet exemple, $\lambda = 0.174$, $\kappa = 0.026$, et $e_0 = 0.889$ [Colonne (5)]

Etape 5: Calculer la déformation volumétrique totale,

$(\varepsilon_v)_k = \sum_{i=1}^{i=k} (d\varepsilon_v)_i$, où k est la ligne actuelle. Cela est fait dans la [Colonne (6)]

Etape 6: Calculer le changement de l'indice des vides: $de = (1+e) d\varepsilon_v$ [Colonne (7)]

avec e est l'indice des vides au début de l'incrément actuel pris de la colonne (8).

Pour la première ligne, utiliser $e = e_0$. dans cet exemple, $e_0 = 0.889$.

Dans la colonne (8), calculer l'indice des vides mis à jour $e_i = e_{i-1} - de$, avec i est la ligne actuelle et $i-1$ est la ligne précédente.

Etape 7: Calculer l'incrément total de la déformation de cisaillement [Colonne (9)]

$$d\varepsilon_s = d\varepsilon_s^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \left(\frac{dp'}{p'} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \left(\frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \right)$$

Etape 8: Calculer la déformation totale de cisaillement $(\varepsilon_s)_k = \sum_{i=1}^{i=k} (d\varepsilon_s)_i$, où k est la ligne actuelle. Cela est fait dans la [Colonne (10)]

Etape 9: Calculer la déformation axiale totale $\varepsilon_1 = \varepsilon_{v/3} + \varepsilon_s$ [Colonne (11)]

TABLE 2.1

(1) p' (kPa)	(2) q (kPa)	(3) η	(4) $d\eta$	(5) $d\varepsilon_v$	(6) ε_v	(7) $d\varepsilon$	(8) ε	(9) $d\varepsilon_s$	(10) ε_s	(11) ε_1
0	0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.88900	0.00000	0.00000	0.00000
206.7	0.0	0.00000	0.00000	0.00322	0.00322	0.00609	0.88291	0.00000	0.00000	0.00107
213.9	21.7	0.10139	0.10139	0.00472	0.00794	0.00888	0.87403	0.00088	0.00088	0.00353
221.2	43.4	0.19615	0.09476	0.00583	0.01377	0.01093	0.86310	0.00224	0.00313	0.00772
228.4	65.1	0.28491	0.08876	0.00660	0.02038	0.01230	0.85079	0.00393	0.00706	0.01385
235.6	86.8	0.36822	0.08331	0.00708	0.02746	0.01311	0.83768	0.00588	0.01294	0.02209
242.9	108.5	0.44657	0.07835	0.00734	0.03480	0.01349	0.82420	0.00807	0.02101	0.03261
250.1	130.1	0.52039	0.07382	0.00742	0.04222	0.01354	0.81065	0.01056	0.03157	0.04564
257.3	151.8	0.59007	0.06967	0.00739	0.04961	0.01338	0.79727	0.01346	0.04503	0.06157
264.5	173.5	0.65593	0.06586	0.00727	0.05689	0.01307	0.78420	0.01701	0.06204	0.08100
271.8	195.2	0.71829	0.06236	0.00710	0.06399	0.01267	0.77153	0.02161	0.08365	0.10498
279.0	216.9	0.77742	0.05913	0.00690	0.07088	0.01221	0.75932	0.02806	0.11170	0.13533
286.2	238.6	0.83356	0.05614	0.00667	0.07755	0.01174	0.74758	0.03816	0.14986	0.17571
293.5	260.3	0.88694	0.05337	0.00644	0.08399	0.01125	0.73633	0.05691	0.20678	0.23477
300.7	282.0	0.93774	0.05081	0.00620	0.09019	0.01077	0.72557	0.10568	0.31246	0.34252
307.9	303.7	0.98617	0.04842	0.00597	0.09616	0.01030	0.71527	0.58718	0.89964	0.93169