

Théorie de l'état critique

1. Introduction

La théorie de l'état critique est une tentative d'apporter ensemble la relation entre la résistance au cisaillement d'un sol et son indice des vides, sous forme d'un modèle qui peut, par la suite, être appliqué à tous les types des sols. Le modèle d'état critique était développé à l'université de Cambridge, la première publication majeure était par Roscoe et al. (1958) et il est maintenant établi comme outil utile de recherche en mécanique des sols.

2. Symboles

La théorie de l'état critique utilise les symboles suivants :

p = contrainte normale effective moyenne = $\frac{\sigma_1' + 2\sigma_3'}{3}$ pour l'essai de compression triaxiale.

q = contrainte déviatorique (déviateur de contrainte) = $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1' - \sigma_3'$, pour l'essai de compression triaxiale.

v = volume spécifique = $(1+e)$, c'est simplement le volume total du sol contenant un volume unitaire des solides ($v_s = 1$).

p_e' = symbole utilisé pour la contrainte de consolidation isotrope équivalente.

3. Consolidation isotrope

La plupart des échantillons de sol testés dans l'appareil triaxial sont isotropiquement consolidés, c-à-d, consolidés sous la contrainte hydrostatique de confinement (σ_3), avant le début de l'étape de cisaillement. La forme de la courbe de compression pour une argile isotropiquement consolidée est montrée dans la figure (1.A)

On peut noter que cette courbe présente les valeurs de v en fonction de p . La courbe v - $\log(p)$ est montrée dans la figure (1.B), et à partir de ce diagramme on voit que, si on ignore les faibles différences entre la courbe de gonflement et la courbe de recompression, le tracé semi logarithmique de la courbe de consolidation isotrope pour la plupart des argiles peut être assimilé à un jeu de lignes droites et ont la forme idéalisée de la figure (1.C).

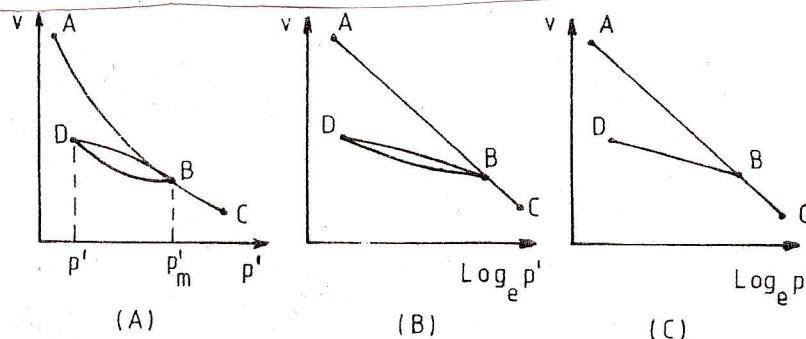


Fig. 1 Forme type de la consolidation isotrope d'un sol cohérent saturé

Tout point sur la ligne ABC représente une consolidation normale alors qu'un point sur la ligne BD, ou en effet tout point au-dessous de ABC représente une surconsolidation. BD est appelée ligne de gonflement.

Si la contrainte précédente maximale sur la ligne de gonflement est P'_m et la contrainte au point D de cette ligne est P' alors on peut dire que le rapport de surconsolidation $OCR = P'_m / P'$

N = le volume spécifique d'un sol normalement consolidé à une valeur de $P' = 1$ unité de contrainte (généralement, $P' = 1 \text{ kN/m}^2$), cela donne $\text{Log}(P') = 0$. L'équation de la ligne AC est alors égale à : $v = N - \lambda \text{Log}(P')$.

Une ligne de gonflement, telle que BD peut se trouver n'importe où au-dessous de AC puisque sa position dépend de la contrainte maximale sur la ligne, P'_m , qui détermine la position de B.

v_x = le volume spécifique d'un sol surconsolidé à $P' = 1 \text{ kN/m}^2$. L'équation de BD est alors $v = v_x - \kappa \text{Log}(P')$.

λ, N et κ sont des valeurs mesurées et doivent être déterminées à partir des essais appropriés.

4. Contrainte équivalente de consolidation, p'_e .

Dans la figure 2, le point P représente un sol avec un indice des vides e et une contrainte effective de consolidation p'_x . La procédure pour déterminer p'_e est illustrée dans le diagramme.

N.B. Puisque P est au-dessous de AB, elle représente un état de surconsolidation.

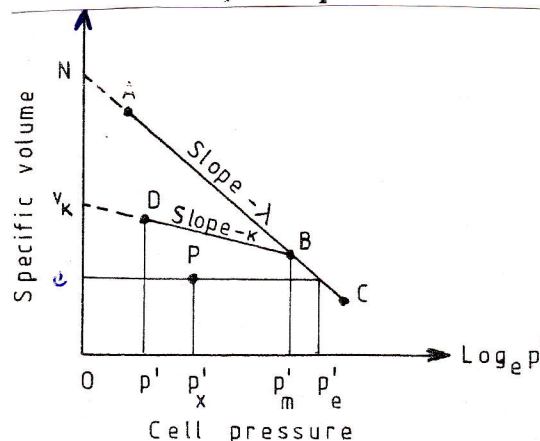


Fig. 2 Détermination de contrainte de consolidation équivalente

5. Comparaison entre une consolidation isotrope et une consolidation unidimensionnelle

Si un échantillon d'argile est soumis à un essai de consolidation unidimensionnelle dans un oedomètre et un autre échantillon de cette argile est soumis à une consolidation isotrope dans une cellule triaxiale, les formes idéalisées des relations $v\text{-Log}(P')$ pour les essais seront illustrées dans la figure 3.

Les valeurs des pentes des deux lignes de consolidation normale sont très proches et pour des raisons pratiques, peuvent être supposées égales à λ . La même chose pour les deux pentes de lignes de gonflement, peuvent être supposées égales à κ .

N.B. Les valeurs de $\text{Log}(P')$ pour l'essai de consolidation unidimensionnelle sont prises égales à $\text{Log}(\sigma')$, (σ' = contrainte normale effective agissant sur l'échantillon de l'oedomètre).

$C_c = \frac{v_0 - v_1}{\log(\sigma'_1 / \sigma'_0)}$ et $\lambda = \frac{v_0 - v_1}{\text{Log}(\sigma'_1 / \sigma'_0)}$, puisque l'indice de compression C_c est exprimé en terme de logarithme décimal on peut voir que $\lambda = C_c / 2.3$.

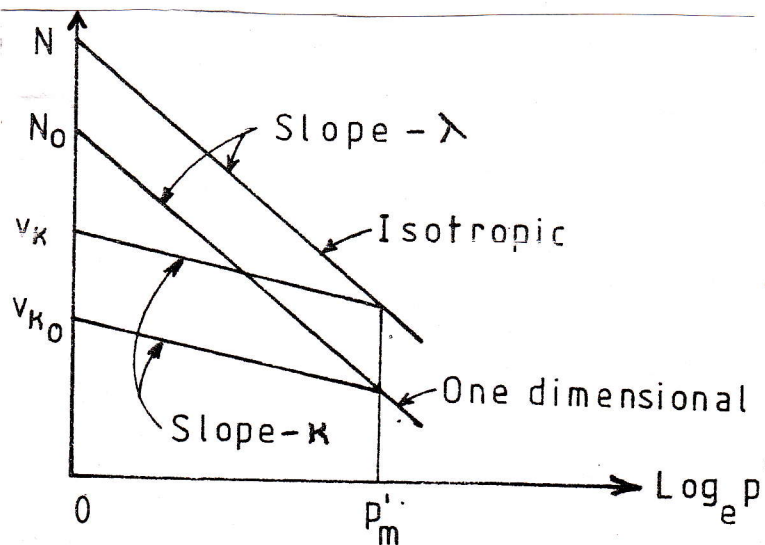


Fig. 3 consolidation isotrope et consolidation unidimensionnelle

6. Chemins de contrainte dans l'espace de contrainte à trois dimensions

(a) Essais non drainés

Si on considère le plan $q : p'$, on peut tracer les chemins de contrainte effective pour le cisaillement non drainé en chemins de contrainte bidimensionnelle, $q = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma'_1 - \sigma'_3$

$p' = \frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_3}{3}$. Le diagramme résultant est montré dans la figure 4.A. Les points A_1, A_2, A_3 se

trouvent sur la ligne de consolidation normale isotrope et leurs chemins de contrainte respectifs atteignent la limite de rupture aux points B_1, B_2, B_3 . Puisque les essais sont non drainés, les valeurs d'indice des vides, aux points B_1, B_2, B_3 sont les mêmes, comme elles étaient quand le sol était aux états de contrainte A_1, A_2, A_3 respectivement.

Connaissant les valeurs de « e », on peut déterminer les valeurs du volume spécifique et tracer la courbe dans le plan $v : p'$, Figure 4.B.

On peut clairement voir que les points de rupture B_1, B_2, B_3 se trouvent sur une ligne droite dans le plan $q : p'$ et sur une courbe similaire à la droite de consolidation normale, dans le plan $v : p'$.

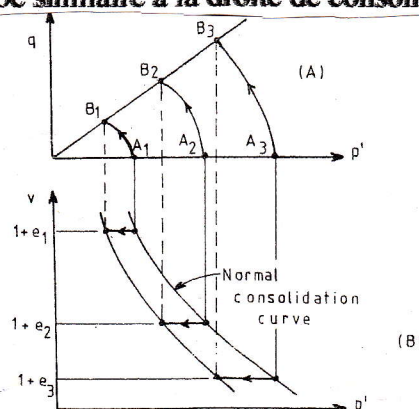


Fig. 4 Chemins de contrainte pour un cisaillement non drainé

(b) Essais drainés

Les chemins de contrainte effective pour le cisaillement drainé sont montrés dans la figure 5. Pour le plan $q : p'$ le tracé consiste des lignes droites inclinées d'une pente de 3.

Les points C_1, C_2, C_3 représentent les points de rupture après le cisaillement drainé, les valeurs d'indice des vides à ces points sont alors plus faibles que ceux aux points A correspondants.

Les chemins de contrainte dans le plan $v : p'$ sont illustrés dans la figure 5.B. Comme avec le cas non drainé, les points de rupture C_1, C_2, C_3 se trouvent sur une courbe similaire à la ligne de consolidation normale.

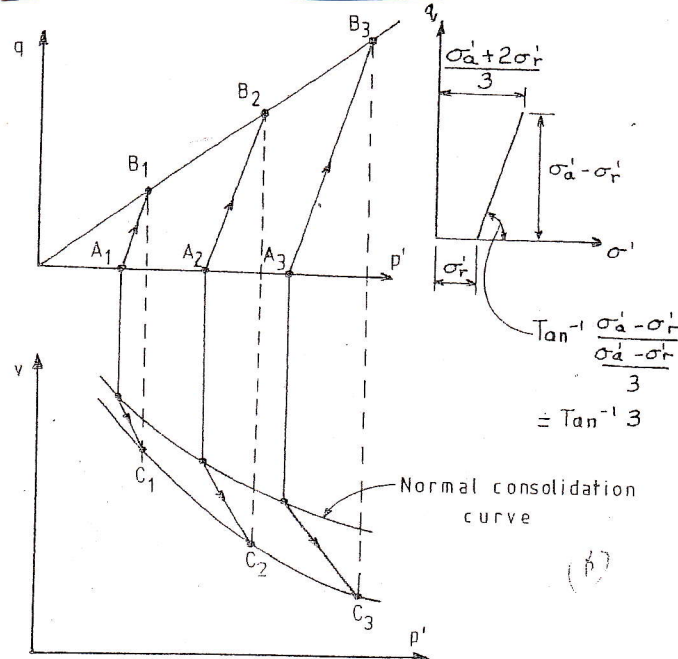


Fig. 5 Chemins de contrainte pour un cisaillement drainé

7. La ligne d'état critique

Parry (1960) a publié des résultats d'essais triaxiaux drainés et non drainés réalisés sur des échantillons d'argile normalement consolidés et surconsolidés. Quelques résultats d'essais Sur des échantillons normalement consolidés sont illustrés au tableau 1. les points (p', q) obtenus de ces résultats sont présentés dans la figure 6A et 6B.

Tableau 1. Résultats d'essais triaxiaux sur des échantillons d'argile normalement consolidée.

(a) Essais non drainés

σ_3 (kN/m ²)	$\sigma_1 - \sigma_3$ (kN/m ²)	u_f (kN/m ²)	w_f (%)	p'_f (kN/m ²)	v
103.4	68.3	50.3	25.1	75.9 (1)	1.67
206.9	119.3	113.8	23.0	132.9 (2)	1.61
310.3	172.4	171.7	21.5	196.1 (4)	1.57
413.7	224.8	227.5	20.3	261.1 (5)	1.54
827.4	468.9	458.5	18.5	525.2 (3)	1.49

(b) Essais drainés

σ_3 (kN/m ²)	$\sigma'_1 - \sigma'_3$ (kN/m ²)	u_f (kN/m ²)	w_f (%)	p'_f (kN/m ²)	v
103.4	114.5	-	23.0	141.6 (3)	1.61
206.9	244.8	-	20.4	288.5 (6)	1.54
310.3	348.2	-	19.3	426.4 (7)	1.51
413.7	481.3	-	18.5	574.1 (9)	1.49
827.4	930.8	-	16.1	1138.0 (10)	1.43

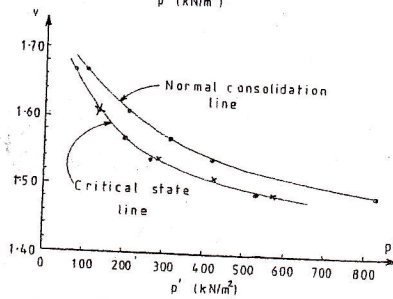
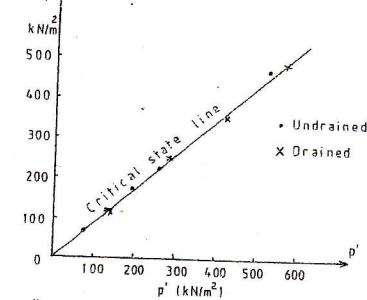


Fig. 6 Projections de la ligne d'état critique Fig. 7 Position de la ligne d'état critique

8. L'équation de la ligne critique

La projection de la ligne sur le plan $q : p'$ est une ligne droite avec l'équation $q = Mp'$, où M est la pente de la ligne.

La projection de la ligne d'état sur le plan $v : p'$ est malheureusement courbée mais si on considère la projection sur le plan $v : \text{Log}(p')$ on obtient une ligne droite avec une pente qui peut être supposée égale à la pente de la ligne de consolidation normale.

Les valeurs pour p'_f sont données sur le tableau 1 et les valeurs de v en fonction de $\text{Log}(p')$ sont présentées dans la figure 8.

Si on utilise le symbole Γ (gamma majuscule) qui représente la valeur de v qui correspond à $\text{Log}(p') = 0$ ($p' = 1 \text{ kN/m}^2$).

L'équation de la projection de la ligne droite est : $v = \Gamma - \lambda \text{Log}(p')$ qui peut être écrite

$$\text{comme } \frac{\Gamma - v}{\lambda} = \text{Log}(p') \text{ ou bien } p' = \text{Exp}\left(\frac{\Gamma - v}{\lambda}\right)$$

La ligne d'état critique est la ligne qui satisfait les deux équations : $q = Mp'$ et $p' = \text{Exp}\left(\frac{\Gamma - v}{\lambda}\right)$. Les valeurs de M , N , Γ et λ varient avec le type du sol.

Des figures 6 et 8, on voit que ces valeurs sont approximativement : $M = 0.85$; $N = 2.13$; $\Gamma = 2.09$; et $\lambda = 0.10$.

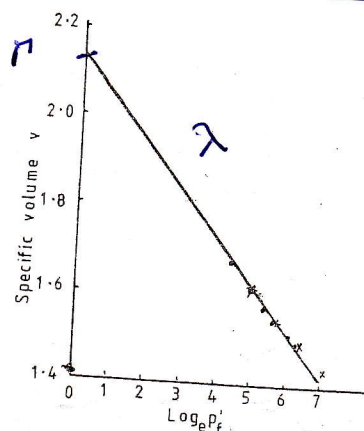


Fig. 8 Relation $v - \text{Log}(p')$ des valeurs du tableau 1

9. Représentation des essais triaxiaux dans l'espace $p' : q : v$

Les résultats des essais triaxiaux drainés et non drainés peuvent être représentés dans l'espace de contrainte tridimensionnel $p' : q : v$.

Pour chaque essai, l'échantillon est premièrement consolidé à un certain point A sur la courbe de consolidation normale correspondant à une certaine valeur particulière de v_0 . A partir de cette étape, les deux essais doivent être considérés séparément.

L'essai non drainé

Si l'échantillon est maintenant cisailé dans un état non drainé le chemin de contrainte se déplace vers le haut à partir du point A jusqu'à ce qu'il rencontre la ligne d'état critique au point B où la rupture se produit. Puisque l'essai est non drainé la valeur du volume spécifique reste égale à v_0 de telle sorte que le chemin de contrainte soit restreint à un plan passant par le point A et parallèle au plan $p' : q$ (Voir figure 9).

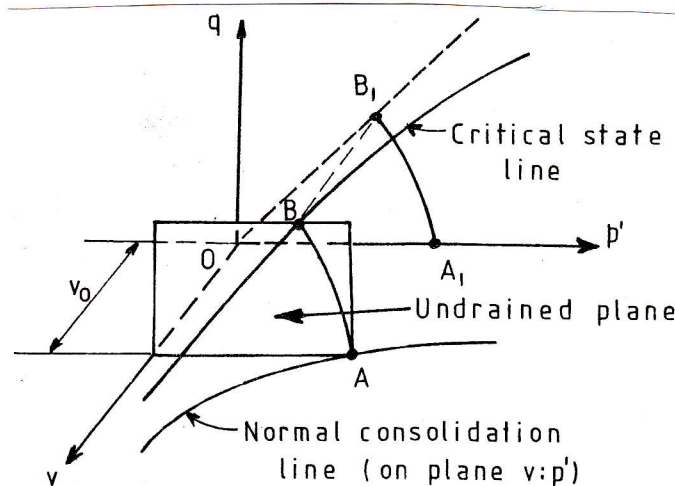


Fig. 9 L'essai de cisaillement non drainé

Les expressions pour p' et q peuvent facilement être obtenues si on maintient l'indice des vides à la rupture, e_f , égale à l'indice des vides immédiatement après la consolidation, e_0 , c-à-d $e_f = e_0$.

Maintenant $p' = \text{Exp}\left(\frac{\Gamma - v_f}{\lambda}\right)$ et $q = M \text{Exp}\left(\frac{\Gamma - v_f}{\lambda}\right)$

Exemple 1

Un échantillon d'argile est consolidé dans une cellule triaxiale avec une contrainte de confinement de 200 kN/m^2 . Il est ensuite cisailé. Utiliser les valeurs de M , N , Γ et λ obtenues des figures 6 et 8, déterminer les valeurs de v , q et p' à la rupture.

Solution

$M = 0.85$; $N = 2.13$; $\Gamma = 2.09$ et $\lambda = 0.1$

$v_0 = N - \lambda \text{Log}(p') = 2.13 - 0.1 \text{Log}(200) = 1.60$, $v_f = v_0 = 1.60$.

$q = M \text{Exp}\left(\frac{\Gamma - v_f}{\lambda}\right) = 0.85 \text{Exp}\left(\frac{2.09 - 1.60}{0.1}\right) = 114 \text{ kN/m}^2$;

$p' = q/M = 114/0.85 = 134 \text{ kN/m}^2$.

L'essai drainé

De la figure 10, on voit que la projection du chemin de contrainte drainée sur le plan $q-p'$ est une ligne droite inclinée d'un angle $\alpha = \arctg(3)$ par rapport à l'horizontale.

Cela veut dire que le chemin de contrainte de cisaillement drainée quelque soit l'itinéraire suivi de A à B doit toujours appartenir au rectangle montré dans la figure (10A). Dans cette figure, on voit que la projection du chemin de contrainte AB sur le plan $q-p'$ est la ligne A_1B_1 .

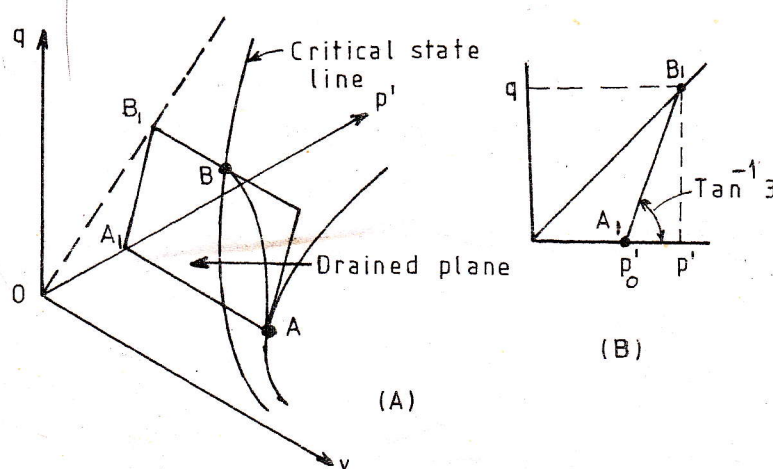


Fig. 10 L'essai de cisaillement drainé

Alors, dans une manière similaire à l'essai non drainé, si on sait qu'un sol a été isotropiquement consolidé au point A sur la courbe de consolidation normale et a été ensuite soumis au cisaillement drainé et on sait encore que son point de rupture, B, est à l'intersection du plan drainé à travers A avec la ligne d'état critique. De la figure (3B)

$$q = 3(p' - p_0') \text{ et on sait que } q = Mp'$$

$$\therefore 3(p' - p_0') = Mp' \text{ c-à-d } p' = \frac{3p_0'}{3-M} \text{ et } q = \frac{3Mp_0'}{3-M}$$

Le volume spécifique à la rupture, v_f , peut donc être obtenu de la formule :

$$v_f = \Gamma - \lambda \log(p') = \Gamma - \lambda \log\left(\frac{3p_0'}{3-M}\right)$$

Exemple 2

Un échantillon d'argile était soumis à une consolidation normale isotropique à une contrainte de 350 kN/m^2 . L'échantillon était ensuite cisailé dans un état drainé.

Déterminer les valeurs de q , p' et v à la rupture si les propriétés de l'argile sont :

$$M = 0.89 ; N = 2.87 ; \Gamma = 2.76 ; \lambda = 0.16$$

Solution

$$q = 3Mp_0' / (3 - M) = (3 \times 0.89 \times 350) / (3 - 0.89) = 443 \text{ kN/m}^2$$

$$p' = q / M = 443 / 0.89 = 498 \text{ kN/m}^2, v_f = \Gamma - \lambda \log(p') = 2.76 - 0.16 \log(498) = 1.77$$

Exercice N° 01

Un échantillon cylindrique de sol de 100 mm de diamètre et 200 mm de longueur est soumis à une essai de cisaillement drainé, les contraintes principales appliquées sont: σ'_1 et $\sigma'_2 = \sigma'_3$. Les déplacements axiaux et radiaux sont 1mm et -0.08mm, respectivement. Le sol est considéré isotropique et élastique, avec un coefficient de Poisson $\nu = 0.40$. On prendra un module de Young, $E = 64000 \text{ kPa}$. Déterminer:

- 1- les déformations principales ε_1 , ε_2 et ε_3 ;
- 2- les contraintes principales σ'_1 et σ'_2 et σ'_3 .
- 3- Déduire le module de cisaillement et le module de déformation volumétrique.

Exercice N° 02

Les paramètres suivants sont connus pour une argile normalement consolidée: $N = 2.50$, $\lambda = 0.13$, $\Gamma = 2.42$ et $M = 1.36$.

Estimer les valeurs du déviateur, de la contrainte moyenne effective et de l'indice des vides à la rupture dans les essais triaxiaux drainés et non drainés, respectivement, sur des spécimens d'argile consolidée sous une contrainte radiale $\sigma'_3 = 300 \text{ kN/m}^2$.

Exercice N° 03

Un échantillon d'argile est consolidé isotropiquement sous une contrainte de confinement $\sigma_3 = 150 \text{ kPa}$. Pour $M = 0.95$, $N = 2.50$, $\lambda = 0.2$, $\kappa = 0.04$ et $\nu = 0.15$, tracer la surface de charge initiale pour le modèle de Camclay modifié.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu \\ \nu & 1 - \nu & \nu \\ \nu & \nu & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix}$$

EXERCICES RÉSOUS

Rhéologie des sols

EXAMPLE 8.1 Calculating Stress and Strain Invariants for Axisymmetric Loading

A cylindrical sample of soil 50 mm in diameter and 100 mm long is subjected to an axial effective principal stress of 400 kPa and a radial effective principal stress of 100 kPa. The axial and radial displacements are 0.5 mm and -0.04 mm, respectively. Assuming the soil is an isotropic, elastic material, calculate (a) the mean and deviatoric stresses, (b) the volumetric and shear (distortional) strains, and (c) the shear, bulk, and elastic moduli.

Strategy This is a straightforward problem. You only need to apply the equations given in the previous section. The negative sign for the radial displacement indicates an expansion.

Solution 8.1

Step 1: Calculate the mean and deviatoric stresses.

$$\sigma'_1 = \sigma'_z = 400 \text{ kPa}, \quad \sigma'_3 = \sigma'_r = 100 \text{ kPa}$$

(a)

$$p' = \frac{\sigma'_z + 2\sigma'_r}{3} = \frac{400 + 2 \times 100}{3} = 200 \text{ kPa}$$

$$q = q' = \sigma'_z - \sigma'_r = 400 - 100 = 300 \text{ kPa}$$

Step 2: Calculate the volumetric and shear strains.

$$\Delta z = 0.5 \text{ mm}, \quad \Delta r = -0.04 \text{ mm}, \quad r = 50/2 = 25 \text{ mm}, \quad L = 100 \text{ mm}$$

(b)

$$\epsilon_z = \epsilon_1 = \frac{\Delta z}{L} = \frac{0.5}{100} = 0.005$$

$$\epsilon_r = \epsilon_3 = \frac{\Delta r}{r} = \frac{-0.04}{25} = -0.0016$$

$$\epsilon_p^e = \epsilon_z + 2\epsilon_r = 0.005 - 2 \times 0.0016 = 0.0018 = 0.18\%$$

$$\epsilon_q^e = \frac{2}{3}(\epsilon_z - \epsilon_r) = \frac{2}{3}(0.005 + 0.0016) = 0.0044 = 0.44\%$$

Step 3: Calculate the moduli.

(c)

$$K' = \frac{p'}{\epsilon_p^e} = \frac{200}{0.0018} = 111,111 \text{ kPa}$$

$$G = \frac{q}{3\epsilon_q^e} = \frac{300}{3 \times 0.0044} = 22,727 \text{ kPa}$$

$$G = \frac{E'}{2(1 + \nu')} \quad \text{and} \quad \nu' = \frac{3K' - 2G}{2G + 6K'} = \frac{3 \times 111,111 - 2 \times 22,727}{2 \times 22,727 + 6 \times 111,111} = 0.4$$

$$\therefore E' = 2G(1 + \nu') = 2 \times 22,727(1 + 0.4) = 63,636 \text{ kPa}$$

Solution 11.3**Step 1:** Find the major principal stress at failure.

$$(\sigma'_1)_f = (\sigma'_1 - \sigma'_3) + \sigma'_3 = 140 + 120 = 260 \text{ kPa}$$

Step 2: Find p'_f .

$$p'_f = \left(\frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_3}{3} \right)_f = \frac{260 + 2 \times 120}{3} = 166.7 \text{ kPa}$$

Step 3: Find ϕ'_{cs} .

$$\sin \phi'_{cs} = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3} = \frac{140}{260 + 120} = 0.37$$

$$\phi'_{cs} = 21.6^\circ$$

Step 4: Find M_c and M_e .

$$M_c = \frac{6 \sin \phi'_{cs}}{3 - \sin \phi'_{cs}} = \frac{6 \times 0.37}{3 - 0.37} = 0.84$$

$$M_e = \frac{6 \sin \phi'_{cs}}{3 + \sin \phi'_{cs}} = \frac{6 \times 0.37}{3 + 0.37} = 0.66$$

Step 5: Find q_f for extension.

$$q_f = \frac{0.66}{0.84} \times 140 = 110 \text{ kPa}; \quad p'_f = \frac{q_f}{M_e} = \frac{110}{0.66} = 166.7 \text{ kPa}$$

EXAMPLE 11.4 Determination of λ , κ , and e_Γ

A saturated soil sample is isotropically consolidated in a triaxial apparatus, and a selected set of data is shown in the table. Determine λ , κ , and e_Γ .

Condition	Cell pressure (kPa)	Final void ratio
Loading	200	1.72
	1000	1.20
Unloading	500	1.25

Strategy Make a sketch of the results in $(\ln p', e)$ space to provide a visual aid for solving this problem.

Solution 11.4**Step 1:** Make a plot of $\ln p'$ versus e .

See Figure E11.4.

Step 2: Calculate λ .

From Figure E11.4,

$$\lambda = -\frac{\Delta e}{\ln(p'_c) - \ln(p'_i)} = -\frac{1.20 - 1.72}{6.91 - 5.3} = 0.32$$

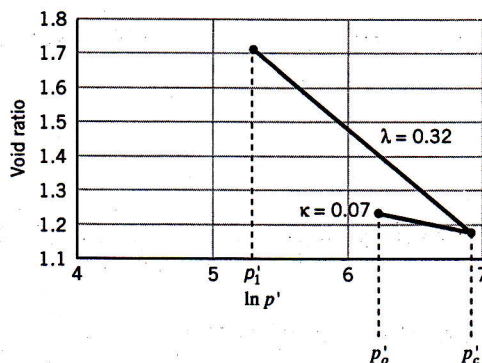


FIGURE E11.4

Note: Figure E.11.4 is not a semilog (base e) plot. The abscissa is $\ln p'$. If the data were plotted on a semilog (base e) plot, then

$$\lambda = -\frac{\Delta e}{\ln(p'_c/p'_1)} = -\frac{1.20 - 1.72}{\ln\left(\frac{1000}{200}\right)} = 0.32$$

Step 3: Calculate κ .

From Figure E11.4,

$$\kappa = -\frac{\Delta e}{\ln(p'_c) - \ln(p'_o)} = -\frac{1.20 - 1.25}{6.91 - 6.21} = 0.07$$

Step 4: Calculate e_Γ .

$$\begin{aligned} e_\Gamma &= e_o + (\lambda - \kappa) \ln \frac{p'_c}{2} + \kappa \ln p'_o \\ &= 1.25 + (0.32 - 0.07) \ln \frac{1000}{2} + 0.07 \ln 500 = 3.24 \end{aligned}$$