البرمجة الخطية

1. مفهوم البرمجة الخطية

يرجع أهمية استخدام نموذج البرمجة الخطية إلى (G.Dantzing) عندما استخدم أسلوب السمبلاكس لحل مشاكل البرمجة الخطية سنة 1947م و تعرف البرمجة الخطية بأنها :

- طريقة رياضية فعالة لاختيار الخطة المثلى، فهي إجراء للبحث عن الحل الأفضل لمشاكل الأعمال التي تتضمن تفاعل متغيرات متعددة، و التي تشمل اختيار أفضل مزيج للموارد التي تؤدي إلى أقصى الأرباح أو أقل التكاليف.
- أسلوب من أساليب الكمية التي تصمم وتستخدم بغرض مساعدة المنظمة في تخصيص مواردها المحدودة.
- أسلوب رياضي لتعظيم أو تخفيض أحد المتغيرات التابعة التي تعتبر دالة لعدد من المتغيرات المستقلة، عندما تكون هذه الأخيرة خاضعة لعدة قيود، و يمكن تعريفها أيضا:

➢ أسلوب رياضي لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة لتحقيق هدف محدد، حيث يمكن التعبير عن كل من الهدف و القيود التي تحيط بتحقيقه في صورة متباينات و معادلات خطية.

➢ نموذج تخصيص الموارد يسعى إلى تحقيق أفضل تخصيص للموارد المحدودة على عدد من الأنشطة المتنافسة، وقد أستخدم لفظ (الأنشطة المتنافسة) هنا للدلالة على أن الموارد التي تخصص لها محدودة.

➢ هي عبارة عن طريقة أو أسلوب رياضي يستخدم للمساعدة في التخطيط و اتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة، و ذلك بهدف زيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف.

و تجدر الإشارة هنا إلى أن كلمة برمجة (Programming) ليست لها علاقة ببرمجة الحاسوب، و لكنها كلمة مرادفة للتخطيط، وتعني وضع المشكلة بصيغة رياضية أو نموذج رياضي وحلها .

وبناء على ذلك فإن البرمجة الخطية تتضمن تخطيط الأنشطة للحصول على نتائج مثلى، و بمعنى أوسع فإن هذا المصطلح يعني أيضا التنفيذ المنظم و الأفضل للأعمال.

من التعريفات السابقة نستخلص أن النماذج الخطية هي:

- تقنية وطريقة رياضية.
- مشكلات البرمجة الخطية تهدف إما إلى تدنية أو تعظيم بعض الكميات, و التي عادة ما تكون في صورة تكاليف أو أرباح.
- تستخدم في حل مشاكل الإدارة التي تتمثل في توزيع الموارد المحدودة على عدد من الاستخدامات المتباينة.

- تحقيق أحسن توزيع للموارد، و يكون بتزويد الإدارة بالمعلومات التي تمكنها من اتخاذ قرارات أكثر فعالية فيما يتعلق بالموارد التي تحت تصرفها .

وتعتبر النماذج الخطية لحل مشكل الأمثلية من أكثر تطبيقات نماذج بحوث العمليات و التي لاقت نجاحا في مجال التطبيق العملي، هذا ما يدعم كيانها الهام في المجال الاقتصادي .

2. فرضيات استخدام البرمجة الخطية

تعتمد نماذج البرمجة الخطية على مجموعة من الفرضيات، ذكرنا فيما سبق أنه عند استخدام البرمجة الخطية في مجال الأعمال فإننا ننظر إليها باعتبارها أسلوبا رياضيا لتوزيع أو استخدام موارد محدودة على عدد من الاستخدامات البديلة، بالطريقة التي تحقق أفضل استخدام ممكن لها ممثلا في شكل هدف محدود، هذا ما يبين لنا أن البرمجة الخطية تستند إلى مجموعة من الأفكار الرئيسية و التي تعتبر أساسا لتفهم التقنية نلخصها في فكرتين هما فكرة النشاط(Activity)و فكرة البدائل (Alternatives)، و يقصد بفكرة النشاط في مجال الأعمال تلك الطريقة التي يمكن أن يتم الإنتاج بها ، بينما يقصد بفكرة البدائل في هذا الصدد تلك الوسائل المختلفة التي يمكن أن تؤدي كل منها إلى تحقيق الهدف المحدد, و في هذه الحالة تقوم البرمجة الخطية في أساسها النظري على خمسة افتراضات رئيسية علمية، الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية يمكن تلخيصها كما يلي:

1.2. فرضية التأكد التام (Certainty)

تعبر هذه الفرضية عن توفر عنصر التأكد، أي أن كافة عناصر المشكلة محدودة ومؤكدة، يمكن القول إذا أن تقنية البرمجة الخطية تقتصر في تطبيقها على تلك المشاكل التي تتضمن اتخاذ القرار في ظل التأكد التام، فالشخص القائم بتعريف المشكلة لا تواجهه عملية التنبؤ أو التخمين حيث أنه يفترض العلم التام بالظروف و العلاقات التي سوف تسود في المستقبل, هذا ما يتنافى مع حالة عدم التأكد الذي يميز الحياة العملية، و منه يجب أن تكون الأرقام الموجودة في دالة الهدف (مساهمات العوامل) و المحددات أو القيود (احتياجات العوامل و المصادر المتوفرة) معروفة وثابتة و غير قابلة للتغيير أثناء فترة معالجة المشكلة موضوع البحث .

2.2. التناسبية (Proportionatity)

و يعني ذلك أن كل نشاط قد يعتبر مستقلا عن الآخر ، ذلك أن معيار الإنجاز هو حاصل جمع المساهمات العوامل المختلفة , كذلك فإن الكميات التي يتم استخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع احتياجات العوامل المختلفة من كل من هذه الموارد.

فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة من منتج معين فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا المنتج، و هذا الافتراض هو أساس افتراض الإضافية.

3.2. الإضافية (Additivity)

ويعني هذا الافتراض أنه لا يوجد تداخل بين الفعاليات أو الأنشطة المختلفة، وبناء على ذلك فإن هذا الافتراض يتضمن ما معناه أنه لو أخذنا مستويات أو جوانب النشاط $(X_1,X_2,.....X_n)$, فإن الاستعمال الكلي و لكل مصدر و كذلك معيار الإنجاز الكلي الناتج عن هذه الأنشطة , يساوي مجموع الكميات المتولدة أو الناجمة عن كل النشاطات الفردية, و بشكل مستقل، فإذا كنا ننتج أربعة منتجات و كان الربح الناجم عن بيع وحدة واحدة من كل من هذه المنتجات هو : 6,12,10,8 وحدات نقدية على التوالي , فإن إجمالي الربح الناجم عن إنتاج و بيع ثلاث وحدات من كل منتج هو 3(8+10+12+6) = 108 وحدات نقدية.

4.2. قابلية القسمة أو الكسرية (Divisibility or Fractionality)

و المقصود هنا أن الحل لمشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة، و هذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار، و إذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى استخدام البرمجة بالأعداد الصحيحة أو الرقمية Integer Programming .

5.2. اللاسلبية (Non-negativity)

وهذا يعني أن قيم عوامل أو متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة، غير سالبة فالقيم السالبة للكميات المادية حالة مستحيلة، فعلى سبيل المثال لا نستطيع إنتاج عدد سالب من الكراسي أو القمصان أو .... خلاصة القول أنه توجد خمسة فرضيات أساسية يقوم عليها نموذج البرمجة الخطية في الحياة العملية، لذلك أجريت الدراسات للتخفيض من حدة الفروض.

3. شروط استخدام البرمجة الخطية

لكي يمكن استخدام البرمجة الخطية فإن هناك شروط يجب توفرها في المشكلة المراد علاجها وهي:

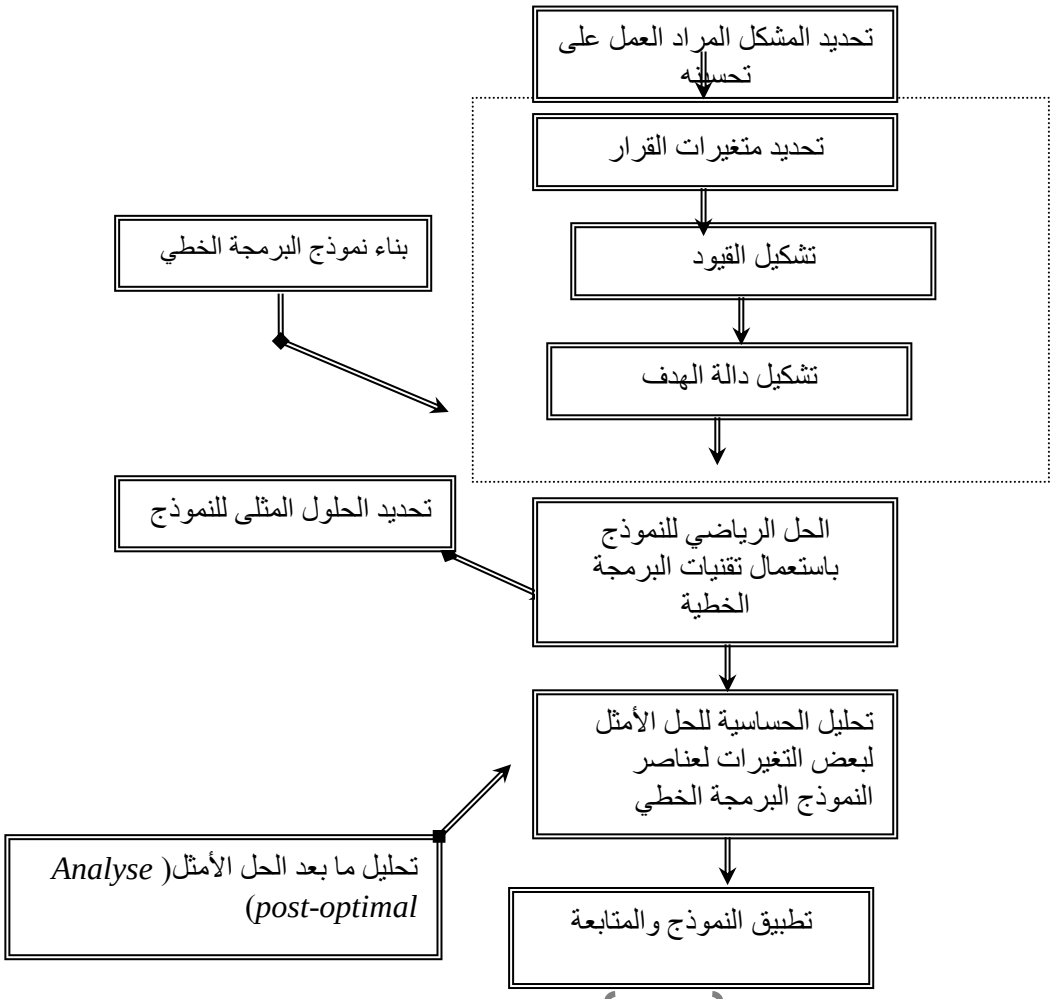
- ينبغي استخدامها في حالة ندرة الموارد , فلو كانت الموارد متوفرة تماما لما كانت هناك مشكلة، فهذه الندرة تمثل أحد أهم القيود التي تخضع لها الإدارة في سعيها لتحقيق الهدف و هي تشكل قيود تربط المتغيرات الداخلة في دالة الهدف ببعضها البعض, و تكون على شكل متباينات و معادلات و تسمى هذه بالقيود الهيكلية (Structural Constraints) .
- يجب أن يكون هناك هدف محدد و معبر عنه بطريقة كمية، كما يجب أن يكون الهدف واضحا و دقيقا بحيث يمكن أن يتخذ شكل معادلة رياضية , وعادة ما يكون الهدف تحقيق أقصى أرباح ممكنة أو تخفيض التكاليف لأقل حد ممكن.

- يفترض أن تكون هناك بدائل مختلفة لتحقيق الهدف، فيجب أن تكون هناك أساليب علمية لمزج الموارد للوصول إلى الهدف حيث يكون لكل بديل عائد متوقع , فتصبح المهمة اختيار البديل الذي يعطي أعلى عائد في حدود القيود المفروضة .
- يفترض أن تكون العلاقات بين المتغيرات التي تتركب منها المشكلة خطية، ويقصد بذلك أن أي تغير ما في أحد المتغيرات يحدث تغيرا مناسبا تماما مع المتغير الآخر.
- أن توجد قيود على المتغيرات الداخلة في دالة الهدف و القيود الهيكلية تستبعد منها القيم السالبة.

4. صياغة الشكل العام للبرنامج الخطي

تستخدم البرمجة الخطية لإيجاد أفضل توزيع للموارد والإمكانات المحدودة على الاستخدامات المختلفة لتحقيق هدف معين كتعظيم الربح أو الإنتاج أو تخفيض التكاليف في ظل قيود وعوامل ثابتة , حيث تصاغ المشكلة الاقتصادية وتكتب على شكل علاقات رياضية خطية , أي معادلات من الدرجة الأولى، والشكل الموالي يوضح باختصار خطوات النمذجة و الحل لنموذج البرمجة الخطي .

طريقة النمذجة و التحليل في البرمجة الخطية



يلخص لنا الشكل خطوات اتخاذ القرار باستخدام البرمجة الخطية، وتكون البداية ببناء النموذج الرياضي للمسالة من البيانات المجمعة من الواقع الفعلي، وهذا يستدعي تحديد الهدف المطلوب تحقيقه وتعريف جميع المتغيرات التي تأثر فيه وذلك من خلال النظام ككل.

- ثم فحص ودراسة الحلول البديلة المتاحة وتطوير عمليات نظامية لعلاجها والوصول إلى الهدف المطلوب تحقيقه.

- و أخيرا تطوير الحل للوصول إلى الحل الأمثل.

عناصر نموذج البرمجة الخطية

يتكون نموذج البرمجة الخطية من العناصر الأساسية التالية:

- **المتغيرات**

وتسمى متغيرات القرار، بتحديد قيمها نصل إلى الهدف المنشود أكبر ربح أو أقل تكلفة للمسألة المدروسة, و يشترط أن تكون غير سالبة، تخضع هذه المتغيرات لنوع معين من القياس، أي يعبر عنها بصورة كمية, ونرمز لهذه المتغيرات بـ

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_n$$

حيث n عدد المتغيرات في المسألة المدروسة.

هذه المتغيرات تعبر عن أحد المفاهيم التالية:

- كميات إنتاج لمنتجات معينة.
- ساعات عمل في أقسام معينة من مصنع أو شركة أو مؤسسة.
- مبالغ من المال المخصص لأنشطة أو فعاليات معينة.
- مقدار من القطع الأجنبي المخصص لاستراد أصناف من السلع .
- كميات من المواد منقولة على طريق معينة، أو بوسائل نقل معينة.
- كمية المواد الأولية اللازمة لتصنيع منتج معين.

- **دالة الهدف**

هي دالة رياضية تمثل الهدف الذي نريد الوصول إليه وتحقيقه، كتحقيق أكبر ربح أو أدنى تكلفة ممكنة ويكون الشكل العام لهذه الدالة:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n$$

أي بالشكل المختصر. $$Z = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

حيث C_J أعداد حقيقية تدعى بمعاملات مساهمة المتغيرات في دالة الهدف , و تصنف الأهداف التي تعالجها البرمجة الخطية إلى مجموعتين :

المجموعة الأولى: تحتوي على حالة التعظيم لدالة الهدف كأن نسعى إلى تحقيق أكبر ربح ممكن أو توفير أعظمي للوقت و الجهد أو زيادة الدخل القومي إلى أقصى حد ممكن , وسنرمز لدالة الهدف بحرف كبير Z و هدفها يكون MAX أي:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n \rightarrow MAX$$

أي بالشكل المختصر. $$Z = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J \rightarrow MAX$$

حيث X_J : متغيرات القرار.و C_J الربح الوحدوي لـ X_J .

المجموعة الثانية : تدنية دالة الهدف كأن نسعى إلى تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن , أو تقليل الخسائر قدر الإمكان , و تكتب دالة الهدف كالتالي:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n \rightarrow MIN$$

أي بالشكل المختصر. $$Z = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J \rightarrow MIN$$

حيث X_J : متغيرات القرار.و C_J التكلفة الوحدوية لـ X_J .

وبذلك تتكون دالة الهدف من المتغيرات التي تشير مثلا إلى المنتجات المختلفة التي يمكن إنتاجها على أن يكون المعامل الخاص بكل متغير هو ربح الوحدة الواحدة من المنتجات في دالة تعظيم الربح ، أو يكون عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة التكلفة .

- **القيود**

هي عبارة عن وجود علاقة تأثير بين المتغيرات، ويعبر عنها رياضيا بمتباينات تدعى الشروط الخطية، وتأخذ الأشكال التالية:

الشكل الأول: $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad i = 1,2,.....,m.$$

إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم MAX.

الشكل الثاني: $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \qquad i = 1,2,.....,m.$$

إذا كانت دالة الهدف من نوع تدنية MIN.

ومنه الشكل الأول و الثاني يطلق عليه الشكل القانوني(Forme Canonique) لنموذج البرمجة الخطية.

الشكل الثالث: $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1,2,.....,m.$$

سواء كانت دالة الهدف تعظيم MAX أو تدنية MIN .

الشكل الثالث يطلق عليه الشكل المعياري (Forme Standard) لنموذج البرمجة الخطية.

الشكل الرابع: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i \qquad i = 1,2,.....,m.$

سواء كانت دالة الهدف تعظيم *MAX* أو تدنية *MIN* .

الشكل الرابع يطلق عليه الشكل المختلط (Forme Mixte) لنموذج البرمجة الخطية.

حيث أنه في كلا الأشكال:

n : عدد المتغيرات في النموذج الخطي.

m : عدد قيود المسألة (عدد الشروط الخطية).

a_{ij} : أعداد حقيقية (معاملات) .

b_i : أعداد حقيقية تعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من قيود المشكلة و يجب أن تكون موجبة.

- **شرط عدم السلبية**

يشترط على المتغيرات أن تكون غير سالبة أي $x_j \geq 0$ وهذا ما يجب فرضه على جميع النماذج لأنها جميعها تعبر عن كميات إنتاج , و الكميات لا يمكن أن تكون سالبة.