المحور الثاني: الفائدة المركبة والدفعات

أولا: الفائدة المركبة:

1- تعريف الفائدة المركبة: هي تلك الفائدة الناتجة عن إضافة الفائدة البسيطة للفترة الى الأصل (رأس المال الموظف)، لكي تنتج بدورها رأس مال جديد للفترة الموالية يعرف بالجملة.

ومنه فهي تختلف عن الفائدة البسيطة التي تحسب ولا تضاف الى رأس المال، بل تدفع الى صاحبها في نهاية مدة القرض عكس المركبة التي تحسب لكل فترة زمنية وتضاف الى رأس المال في الفترة الزمنية التالية ويجرى عليها فائدة حسب معدل الفائدة المقررة لذلك.

2- القانون الأساسي للفائدة المركبة: ان عناصر الفائدة المركبة هي نفسها في الفائدة البسيطة، ومنه:

C_0: المبلغ الأصلي أو الموظف للاستثمار.

t: معدل الفائدة

n:المدة

V: الجملة المكتسبة أو المتحصل.

I: الفائدة المحصل عليها.

لدينا:

$$I= C_0 .t .n$$

$$n=1 \rightarrow I_1= C_0 .t$$

$$n=2 \rightarrow I_2= (C_0 + I_1).t =(C_0+ C_0 .t).t$$

$$\rightarrow I_2= C_0 (1+ t).t$$

$$n=3 \rightarrow I_3= C_0 (1+ t)^2.t$$

..

ومنه ففائدة أخر الفترة تساوي:

$$\rightarrow \boxed{I_n= C_0 (1+ t)^{n-1}.t}$$

أما الجملة المحصل عليها في السنة الأولى:

$$V_1= C_0 + I_1= C_0+ C_0 .t$$

$$V_1= C_0(1+t)$$

والجملة المحصل عليها في السنة الثانية:

$$V_2= V_1 + I_2= C_0(1+t)+ C_0 (1+ t).t$$

$$V_2= C_0(1+t)^2$$

$$V_3= C_0(1+t)^3$$

$$\boxed{V_n= C_0(1+t)^n}$$

أما الفائدة الاجمالية فيمكن ايجادها من خلال العلاقة التالية:

$$I= V_n -C_0 = C_0(1+t)^n- C_0 \rightarrow \boxed{I= C_0 [(1+t)^n -1]}$$

ملاحظة: يمكن حساب $(1+t)^n$ بالآلة الحاسبة، كما يمكن استخراجها من الجدول المالي رقم01.

مثال: قام شخص بتوظيف مبلغ 20000 دج بالبنك الوطني الجزائري لمدة 6 سنوات وبمعدل فائدة مركبة 4.5% سنويا.

المطلوب: 1-أحسب فائدة السنة الأولى والسنة السادسة؟

2- أحسب الجملة والفائدة الاجمالية؟

الحل: $C0=20000$، $t=0,045$، $n=6$

لدينا:

$$I_n= C_0 (1+ t)^{n-1}.t \quad I_1= C_0 (1+ t)^{1-1}.t= 20000.0,045=900 \rightarrow$$

$$I_6= C_0 (1+ t)^{6-1}.t= 20000.(1+0,04)^5 .0,045=1121,56$$

$$Vn= C_0(1+t)^n=20000(1+0.045)^6=26045,20$$

$$I= C_0 [(1+t)^n -1]=20000[(1+0,045)^6 -1]= 6045,20$$

3-حساب عناصر الجملة:

*المبلغ الموظفC_0:

$$V_n= C_0(1+t)^n \rightarrow C_0= V_n/(1+t)^n \rightarrow C_0= V_n (1+t)^{-n}$$

علما أن المبلغ الموظف هو نفسه القيمة الحالية بالفائدة المركبة.

*معدل الفائدة t:

$$V_n= C_0(1+t)^n \rightarrow (1+t)^n= V_n/ C_0 \rightarrow t= \sqrt[n]{\frac{Vn}{C0}} -1 \rightarrow t=(V_n/C_0)^{1/n} -1$$

*المدة n:

$$(1+t)^n= V_n /C_0 \rightarrow \log (1+t)^n =\log (V_n /C_0) \rightarrow n \log(1+t) = \log (V_n /C_0) \rightarrow n= \frac{log\ (Vn\ /C0)}{log(1+t)}$$

4- حساب الجملة المكتسبة عندما تكون المدة n عدد غير صحيح:

لدينا: $n= k+p/q$ أي: $V_{k+p/q}= C_0(1+t)^{k+p/q}$

هناك طريقتين لحساب الجملة المكتسبة وهما:

أ-الطريقة العقلانية: تطبق الفائدة المركبة على الجزء الصحيح ثم الجملة المكتسبة من خلالها تطبق عليها الفائدة البسيطة.

$$V_{k+p/q}= C_0(1+t)^k+ C_0(1+t)^k.t.(p/q)$$

$$= C_0(1+t)^k(1+ t.(p/q))$$

ب-الطريقة التجارية: نستعمل الصيغة العامة للجملة لكل المدة: $n= k+p/q$

$$V_{k+p/q}= C_0(1+t)^{k+p/q} = C_0(1+t)^k . C_0(1+t)^{p/q}$$

والقيمة $C_0(1+t)^{k+p/q}$ يمكن حسابها مباشرة بالألة الحاسبة كما يمكن اللجوء الى الجداول المالية، فالجدول رقم 01 يعطينا قيمة القوس $C_0(1+t)^k$ والجدول رقم 06 يعطينا قيمة $(1+t)^{p/q}$.

مثال: أحسب الجملة المكونة لرأس المال قدره 15000 دج موظف بمعدل فائدة مركبة سنوي 8% لمدة 5 سنوات و6 أشهر وهذا باستخدام الطريقة التجارية والعقلانية.

الحل:

C_0= 15000 ،t=0,08 ،n=5+6/12

الطريقة العقلانية:

$$V_{k+p/q} = C_0(1+t)^k(1+ t.(p/q))= 15000(1+0.08)^5 .(1+0.08.(6/12))=22921.52$$

الطريقة التجارية:

$$V_{k+p/q}= C_0(1+t)^k . C_0(1+t)^{p/q} =15000(1+0.08)^5 .(1+0.08)^{6/12}=22904.56$$

ومنه نتيجة الحل بالطريقة التجارية دائما تكون أقل من الحل بالطريقة العقلانية

5– معلات الفائدة المتناسبة والمتكافئة:

أ–معدلات الفائدة المتناسبة: المعدل المتناسب لمعدل سنوي t هو الذي يتعلق أو يطبق في k جزء من السنة بحيث يكون المعدلان متناسبان لفترتين مختلفين إذا تحققت العلاقة التالية: $\frac{k}{1}\frac{T}{.tk}$ = أي: $t_k= t/k$

حيث: t هو المعدل السنوي لـ 1دج ولفترة زمنية واحدة وt_k هو المعدل الموافق للفترة k وهي جزء من الفترة الواحدة.

مثال: حدد الفائدة البسيطة والمركبة المستحقة عن مبلغ 250000 دج مستثمر لمدة ثلاث سنوات، وهذا بتطبيق المعدل السنوي 12% والمعدل الثلاثي المتناسب معه، وحدد إذا ما كانت الفائدة المحققة باستخدام المعدلين متساوية.

الحل:

*تحديد المعدل الثلاثي:

$$K=4\rightarrow t_k= t/k \rightarrow t_3= 12/4=3\%$$

*حساب الفائدة البسيطة:

بالمعدل السنوي:

$$I= C.t.n = 250000(0,12)3= 90000$$

بالمعدل الثلاثي: بما انّ كل سنة فيها أربع ثلاثيات فان: $n= 4.3=12$

$$I= C.t.n = 250000(0,03)12= 90000$$

ومنه فالفائدة البسيطة بالمعدل السنوي هي نفسها بالمعدل الثلاثي المتناسب معه.

*حساب الفائدة المركبة:

بالمعدل السنوي:

$$I= C_0 [(1+t)^n –1] = 250000((1+0,12)^3–1)=101232$$

بالمعدل الثلاثي:

$$I= C_0 [(1+t)^n –1] = 250000((1+0,03)^{12}–1)=106440,22$$

ومنه الفائدة المركبة المحسوبة بالمعدل السنوي غير متساوية مع تلك المحسوبة بالمعدل الثلاثي المتناسب معه.

ب– معدلات الفائدة المتكافئة: وهي تلك التي تمنح نفس الجملة بفائدة مركبة لنفس رأس المال الموظف ولنفس المدة.

عند معدل سنوي t فان: $V= C_0(1+t)$

عند المعدل المتكافئ فان: $V= V= C_0(1+t)$

$$C_0 (1 + t) = C_0 (1 + t_k)^k \Rightarrow (1 + t) = (1 + t_k)^k$$

$$1 + t_k = \sqrt[k]{(1 + t)} \Rightarrow \quad t_k = (1 + t)^{\frac{1}{k}} - 1$$

مثال: تمّ توظيف مبلغ 12000 لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة مركبة 9% سنويا.

المطلوب: أحسب جملة هذا المبلغ باستخدام معدل الفائدة المركبة إذا كانت الفائدة تحسب كل ستة أشهر (سداسية).

الحل:

$$t_k = (1 + t)^{\frac{1}{k}} - 1 \rightarrow t_2 = (1+0{,}09)^{1/2} - 1 = 0.044 \rightarrow t_2 = 4.40\%$$

$$V = C_0 (1 + t_k)^{n*k} = 12000(1+0{,}044)^{10} = 18458{,}07$$

6- الخصم بالفائدة المركبة : هو ما يقتطعه البنك من القيمة الاسمية للورقة التجارية مقابل سداد قيمة الورقة قبل تاريخ استحقاقها، ولا يختلف الخصم مع الفائدة المركبة فهما متساويان، إلا أن الفائدة المركبة تضاف إلى المبلغ الأصلي عند حساب الجملة المكتسبة، في حين أن الخصم يطرح من الجملة للحصول على أصل القرض، ونرمز للخصم بالرمز E .

أ- الخصم بدلالة القيمة المحصلة:

$$E = I = V - C_0 = V - V(1 + t)^{-n} \Rightarrow E = V[1 - (1 + t)^{-n}]$$

ب- الخصم بدلالة أصل المبلغ:

$$E = I = V - C_0 = C_0(1+t)^n - C_0 \Rightarrow \quad E = C_0 [(1+t)^n - 1]$$

مثال: ورقة تجارية قيمتها الاسمية 120000 دج تستحق بعد 4 سنوات، خصمت بمعدل 6% احسب قيمتها الحالية ثم قيمة الخصم .

الحل:

$$Va = C_0 = V_n (1+t)^{-n} = 120000(1{,}06)^{-4} = 95051{,}24$$

$$E = I = V - C_0 = 120000 - 95051{,}24 = 24948.76$$

- الخصم بدلالة القيمة الاسمية:

$$E = V[1 - (1 + t)^{-n}] = 120000\ [(1-(1+0.06)^{-4}] = 24948{,}76$$

-الخصم بدلالة القيمة الحالية:

$$E = Va[1 - (1 + t)^{-n}] = 24948{,}76\ [(1-(1+0.06)^{-4}] = 5187{,}01$$