Chapitre 1: Rappels mathématiques

1-1-L'analyse dimensionnelle (les équations aux dimensions):

1-1-1 Introduction :

L'analyse dimensionnelle est une méthode pratique permettant de vérifier l'homogénéité d'une formule physique à travers ses équations aux dimensions, c'est-à-dire la décomposition des grandeurs physiques qu'elle met en jeu en un produit de grandeurs de base : longueur, durée, masse, intensité électrique, etc., irréductibles les unes aux autres.

L'analyse dimensionnelle repose sur le fait qu'on ne peut comparer ou ajouter que des grandeurs ayant la même dimension ; on peut ajouter une longueur à une autre, mais on ne peut pas dire qu'elle est supérieure, ou inférieure, à une masse. Intuitivement, il est clair qu'une loi physique ne saurait changer, hormis dans la valeur numérique de ses constantes, au simple motif qu'on l'exprime dans d'autres unités.

les physiciens ont défini un système international, le SI, dont l'usage est en principe obligatoire. Ce système définit, à partir de phénomènes physiques, une unité pour chaque dimension de base:

1-1-2 Les grandeurs physiques de base :

sept grandeurs de base du système international

Grandeur	**Symbole dimensionnel**
masse	**M**
longueur	**L**
temps	**T**
intensité électrique	**I**
température	θ
intensité lumineuse	J
quantité de matière	**N**

- M: la masse. Son unité est le kilogramme (kg)
- L: la longueur. Son unité est le mètre (m)
- T: le temps. Son unité est la seconde (s)
- I: l'intensité électrique. Son unité est l'ampère (A)
- Φ: la température thermodynamique. Son unité est le kelvin (K)
- J: l'intensité lumineuse. Son unité est le candela (cd)
- N: la quantité de matière. Son unité est la mole (mol)

Le tableau suivant donne la définition actuelle de ces 7 unités de base.

Nature	*Unité*	*Symbole*	*Définition*
Longueur	mètre	m	*Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde. (1983)*
Masse	kilogramme	kg	*Le kilogramme est la masse du prototype en platine iridié, déposé au Bureau International des Poids et Mesures. (1889)*
Temps	seconde	s	*La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. (1967) précision : 10^{-12}*
Courant électrique	ampère	A	*L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance d'un mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs, une force égale à 2.10^{-7} newton par mètre de longueur. (1948)*
Température	kelvin	K	*Le kelvin est égal à la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau. (1967)* *Le degré Celsius est égal au kelvin.*
Quantité de matière	mole	mol	*La mole est la quantité de matière contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kg de carbone 12. (1971)* *La mole (mol) est l'abréviation de molécule par gramme.*
Intensité lumineuse	candela	cd	*La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet une radiation monochromatique de fréquence 540.10^{12} hertz (longueur d'onde 0,555 µm) et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian. (1979)*

1-1-3 Les grandeurs dérivées :

Une grandeur dérivée est ainsi une grandeur dont la dimension est liée à au moins une des sept grandeurs de base. Une loi physique exprime le lien entre une grandeur dérivée et les grandeurs de base (ou d'autres grandeurs dérivées). Son énoncé impose une certaine équation aux dimensions.

Grandeur	*Unité*		
	Nom	*Symbole*	*Expression*
angle plan	radian	rad	1 m/m
angle solide	stéradian	sr	1 m^2/m^2
fréquence	hertz	Hz	1 s^{-1}
force	newton	N	1 $kg.m/s^2$
pression, contrainte	pascal	Pa	1 N/m^2
énergie, travail, quantité de chaleur	joule	J	1 N.m
puissance, flux énergétique	watt	W	1 J/s
charge électrique, quantité d'électricité	coulomb	C	1 A.s
potentiel électrique, différence de potentiel, tension, force électromotrice	volt	V	1 W/A
capacité électrique	farad	F	1 C/V
résistance électrique	ohm	Ω	1 V/A
conductance électrique	siemens	S	1 Ω^{-1}
flux d'induction magnétique	weber	Wb	1 V.s
induction magnétique	tesla	T	1 Wb/m^2
inductance	henry	H	1 Wb/A
température Celsius	degré Celsius	°C	1 K
flux lumineux	lumen	lm	1 cd/sr
éclairement	lux	lx	1 lm/m^2
activité d'un radionucléide	becquerel	Bq	1 s^{-1}
dose absorbée, énergie massique communiquée, kerma, indice de dose absorbée	gray	Gy	1 J/kg
équivalent de dose, indice d'équivalent de dose	sievert	Sv	1 J/kg

La dimension d'une grandeur dérivée est dite « simple » lorsqu'elle n'est liée qu'à une des sept grandeurs de base. Par exemple, la dimension de la superficie est simple : elle n'est liée qu'à la longueur et correspond au carré d'une longueur. La dimension d'une grandeur dérivée est dite « composée » lorsqu'elle est liée à au moins deux des sept grandeurs de base. Par exemple, la vitesse est le rapport d'une longueur par une durée.

1-1-4 Ecriture d'une équation aux dimensions :

Deux règles principales sont à respecter

-Dans les expressions littérales, on peut remplacer les grandeurs par leurs unités. L'unité de la grandeur sera notée : [grandeur]. Ex : [tension] = V ou [distance] = m etc.

-Remarque : en toute rigueur, la notation [grandeur] désigne la dimension de la grandeur (pas exactement son unité...).

Lors d'analyses dimensionnelles, le chiffre 1 est synonyme de « sans unité ».

-Soit G une grandeur physique. Sa dimension est notée [G]. Par exemple, si G est une longueur, on écrira : **[G] =L**

-L'équation aux dimensions d'une vitesse v est : $\mathbf{[v] = LT^{-1}}$

On démontre que la dimension d'une grandeur physique g quelconque peut s'écrire sous la forme du produit des 7 grandeurs de base G_i, chacune de ces grandeurs étant affectée d'une puissance α_i pouvant varier entre 0 et n (n appartenant à Q),

ce qui se symbolise par: $[g] = PG_i^{\alpha_i}$
Nous avons vu des exemples plus haut de cette écriture. Elle est très utilisée en analyse dimensionnelle pour déterminer la dimension d'une grandeur à partir de la dimension d'une grandeur connue. L'équation nous ramène à la résolution d'un système généralement très simple.

-On en déduit l'écriture générale de l'équation aux dimensions de la grandeur G:

$$[G] = M^{\alpha 1}.L^{\alpha 2}.T^{\alpha 3}.I^{\alpha 4}.J^{\alpha 5}.O^{\alpha 6}.N^{\alpha 7}$$

-L'équation aux dimensions d'une grandeur G sans dimension se recuit à :

$$[G] = 1$$

-Lorsque les dimensions à droite et à gauche de l'équation sont identiques, on dit que cette équation est **homogène**.

-Toute équation non homogène est **nécessairement** Fausse.

-Toute équation homogène est juste, sinon pertinente.

-**Exemple** Retrouver dans quelles unités SI s'exprime une force ?

— La physique nous dit qu'une force est le produit d'une masse par une accélération, soit $F = m\gamma$

Solution

D'autre part, une accélération est une vitesse par unité de temps : m/s^2 sa dimension est $[\gamma] = L.T^{-2}$

En combinant avec la masse, on obtient, pour la force :

$$[F] = M.\, L.T^{-2}.$$

La force s'exprime donc en kilogramme .mètre par seconde et par seconde ($kg.\ m.\ s^{-2}$).

On retrouve cette valeur dans le tableau des unités dérivées.

Cette unité compliquée, le kilogramme mètre par seconde et par seconde s'appelle le Newton(N), en l'honneur de ce grand homme

Nous savons que la physique du pendule simple (sans amortissement ni forçage) est gouvernée par sa longueur l, sa masse m et l'accélération de la pesanteur g. Nous pouvons donc supposer que les trois dimensions indépendantes de ces grandeurs interviendront dans l'expression de la période T du pendule.
Comme nous l'avons appris plus haut, nous pouvons donc écrire l'équation aux dimensions:

$$[T] = [l]^{\alpha}*[m]^{\beta}*[g]^{\gamma}. \quad (1)$$

Nous savons que T est homogène à un temps. Nous savons aussi que la dimension de g est $L*T^{-2}$. Ce qui me permet d'écrire en employant les valeurs standards des dimensions

$$T = L^{\alpha}*M^{\beta}*(L*T^{-2})^{\gamma}.$$

Pour obtenir l'homogénéité de l'équation, j'ai donc le système:

$$\beta = 0 \qquad \alpha + \gamma = 0 \qquad -2*\gamma = 1$$

Sa résolution est des plus simples. Nous obtenons $\alpha = 1/2$ et $\gamma = -1/2$, ce qui reporté dans l'équation (1) donne:

$$[T] = [l]^{1/2}*[g]^{-1/2} \text{ soit } T = k*(l/g)^{1/2}$$

ce qui est bien l'ordre de grandeur attendu, la constante k ne pouvant être déterminée par cette méthode !

1-1-5 Calcul de petites variations :

Le calcul de petites variations se fait en utilisant les différentielles ou différentielles logarithmiques. Les petites variations peuvent être positives ou négatives. Les exemples simples suivants montrent l'utilisation des différentielles pour calculer des petites variations.

Exemple

: Déterminer la variation de la période δT d'un pendule simple, suite à une petite variation de la longueur du fil δl, l'intensité de la pesanteur g étant constante et connue avec une bonne précision.On supposera que l'on a des petites oscillations.

$$T=2\pi\,(L/g)^{1/2}$$

Solution

1-2 : Erreur et incertitude :

La physique travaille continuellement avec des approximations. Une des raisons en est que toute mesure d'une grandeur quelconque est nécessairement entachée d'erreur. Il est impossible d'effectuer des mesures rigoureusement exactes.

Pour prendre conscience du degré d'approximation avec lequel on travaille, on fait l'estimation des erreurs qui peuvent avoir été commises dans les diverses mesures et on calcule leurs conséquences dans les résultats obtenus. Ceci constitue le calcul d'erreur, ou calcul d'incertitude.

1-2-1 : 1Erreur :

L'erreur est la différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie de la grandeur que l'on mesure.

Il existe deux types d'erreurs :

- Les erreurs accidentelles (ou erreurs expérimentales) (ou erreurs aléatoire) que l'on traitera de façon statistique ou probabiliste : par exemple, la mesure répétée de la période d'un pendule avec un chronomètre manuel donne des valeurs légèrement différentes ;

- L'erreur systématique est une erreur qui va se reproduire à chaque mesure (un biais) : par exemple, si la voie 1 d'un oscilloscope n'est pas mise à zéro initialement, la valeur d'une tension mesurée sur cette voie sera systématiquement entachée de la même erreur.

1-2-1 -1: L'erreur absolue ∂X :

Par définition l'**erreur absolue** d'une grandeur mesurée est l'écart qui sépare la valeur expérimentale
de la valeur que l'on a de bonne raison de considérer comme vraie. Prenons par exemple la vitesse de la lumière dans le vide. La valeur considérée actuellement comme vraie est :

$$C_0 = 299\,792 \text{ [km/s]}$$

Si un expérimentateur trouve, lors d'une mesure

$$C = 305\,000 \text{ [km/s]}$$

on dit que l'**erreur absolue** de son résultat est : $\partial C = C - C_0 = 5208$ [km/s]

1-2-1 -2: L'erreur relative

Par définition l'erreur relative est le quotient de l'erreur absolue à la valeur vraie :

Erreur relative: $\partial C/C_0 = 5208$ [km/s]/ 299 792 [km/s]= 0,0174 ≡1,7 %

L'erreur relative n'a pas d'unité ; elle nous indique la qualité (l'exactitude) du résultat obtenu. Elle s'exprime généralement en % (pour cent).

On voit clairement qu'il n'est possible de parler d'erreur que si l'on a à disposition une valeur de référence que l'on peut considérer comme vraie.

1-2-2 : Incertitude :

Lors de la plupart des mesures physiques, on ne possède pas de valeur de référence, comme celle dont nous venons de parler. Lorsqu'on mesure la distance de deux points, ou l'intervalle de temps qui sépare deux événements, ou la masse d'un objet, on ne sait pas quelle est la valeur exacte de la grandeur mesurée. On ne dispose que de la valeur expérimentale. Néanmoins, par une critique objective des moyens utilisés pour faire la mesure, on peut se faire une idée de l'« erreur » maximale qu'on peut avoir commise, « erreur » que l'on appelle de façon plus appropriée **incertitude**.

1-2-2 -1 : Différents types d'incertitudes :

On distingue deux types d'incertitudes appelées incertitudes-types car exprimées à l'aide d'un écart-type :

-L'incertitude de type A**- Les erreurs accidentelles (ou erreurs expérimentales) (ou erreurs aléatoire)**- est une incertitude de type statistique : on répète un certain nombre de fois la mesure de la grandeur cherchée, on donne un résultat qui est la valeur moyenne des valeurs mesurées et une incertitude calculée statistiquement ;

-L'incertitude de type B**- L'erreur systématique**- est une incertitude qui n'est pas statistique.

1-2-2 -2 : L'incertitude absolue Δx :

L'indication complète du résultat d'une mesure physique comporte la valeur qu'on estime la plus probable et l'intervalle à l'intérieur duquel on est à peu près certain que se situe la vraie valeur.

La valeur la plus probable est en général le centre de cet intervalle. La demi-longueur de celui-ci est appelée incertitude absolue de la mesure.

Ainsi, si l'on désigne par x la valeur la plus probable de la grandeur mesurée G, par 0 x la vraie valeur (qui nous est inconnue) et par Δx l'incertitude absolue, on a :

$$x - \Delta x \leq x_0 \leq x + \Delta x$$

Sous une forme condensée, le résultat de la mesure s'écrit :

$$G = x \pm \Delta x$$

Exemples :

1) La longueur d'un objet est de 153 ± 1 [mm] .

Cela signifie qu'avec une incertitude absolue $\Delta L = 1$ [mm], la valeur exacte est comprise entre 152 [mm] et 154 [mm].

2) La température d'un local est de 22 ± 1 [°C].
Ici l'incertitude absolue $\Delta\theta = 1$ [°C], c'est-à-dire que l'on garantit que la température n'est pas inférieure à 21 [°C] ni supérieure à 23 [°C].

Remarque :
Lorsqu'on mesure une grandeur (longueur, temps, masse, température, …), on peut considérer – pour simplifier - que l'incertitude absolue correspond à la plus petite 1-2-2 -2 graduation de l'instrument de mesure utilisé.

1-2-2 -3 : L'incertitude relative :
L'incertitude absolue, lorsqu'elle est considérée seule, n'indique rien sur la qualité de la mesure. Pour juger de cette qualité, il faut comparer l'incertitude absolue à la grandeur mesurée. Le rapport de ces grandeurs est appelé incertitude relative.
Incertitude relative : $\Delta x/x$

Comme pour l'erreur relative, l'incertitude relative est un nombre pur (sans unité), pratiquement toujours beaucoup plus petit que 1, que l'on exprime généralement en %

1-2-3 : Calcul d'incertitude :
En physique expérimentale, les grandeurs que l'on mesure sont généralement utilisées pour déduire des résultats par des calculs. Il est alors intéressant de savoir de quelle manière les incertitudes des mesures se répercutent sur les incertitudes des résultats.

a) Addition et soustraction
Supposons que la grandeur cherchée R soit la somme de 2 mesures A et B :

$$R = A + B$$

Dans ce cas l'incertitude sur le résultat est :

$$\Delta R = \Delta A + \Delta B$$

Il en est de même pour : $R = A - B$

→ l'incertitude absolue sur une somme ou une différence est la somme des incertitudes
absolues de chaque terme.

Exemple : Un récipient a une masse m = 50 ± 1 [g]. Rempli d'eau, sa masse vaut :
M = 200 ± 1 [g].
La masse d'eau qu'il contient est donc : $m_{eau} = M - m$
En appliquant la règle ci-dessus : $\Delta m_{eau} = \Delta M + \Delta m = 1 + 1 = 2$ [g]
il s'ensuit que : $m_{eau} = 150 \pm 2$ [g]

b) Multiplication et division
Supposons maintenant que la grandeur cherchée R soit le résultat du calcul suivant :

$$R = (A \,.B)/C$$

où A, B et C sont des grandeurs que l'on mesure.
Dans ce cas l'incertitude relative sur le résultat est :
$\Delta R/R = \Delta A/A + \Delta B/B + \Delta C/C$

→ l'incertitude relative sur un produit ou un quotient est la somme des incertitudes relatives de chaque terme.

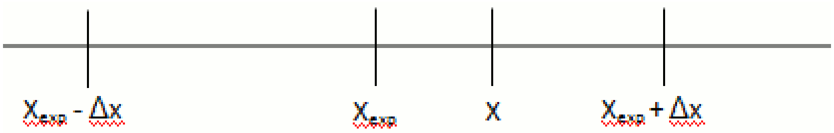
L'incertitude absolue :

L'incertitude absolue correspond à l'estimation de l'erreur que fait l'expérimentateur lorsqu'il effectue une mesure.

Cela signifie que le résultat expérimental de la mesure est X_{exp} mais que l'étude des causes d'incertitudes (appareils, méthode, lecture...) nous conduisent à penser que la valeur exacte (X) ne peut pas s'écarter de plus de ?x de cette valeur. ?x représente l'**incertitude absolue** de la mesure.

La valeur exacte est comprise entre $X - \Delta x$ et $X + \Delta x$
On peut écrire: $X_{exp} - \Delta x < \mathbf{X} < X_{exp} + \Delta x$

Ce qui peut se traduire schématiquement par :



L'incertitude relative :

L'incertitude relative (I_R) est le rapport entre l'incertitude absolue (?x) et la valeur exacte (X). Or, cette valeur (X) n'étant pas connue, elle est approchée par la valeur expérimentale (X_{exp}).

$$I_R = \frac{\Delta X}{X} \approx \frac{\Delta X}{X_{exp}}$$

L'incertitude relative nous donne une idée de la **précision de la mesure** et peut être exprimée en pourcent.

Fidélité de l'appareil de mesure :

Un appareil est **fidèle** lorsqu'il donne toujours le même résultat pour une même mesure. C'est une **qualité primordiale**. Un appareil qui n'est pas fidèle n'a aucun intérêt.

Résolution :

La **sensibilité** d'un appareil est la plus petite variation de mesure qu'il peut déceler. Ne pas confondre la résolution d'un appareil avec l'incertitude absolue.

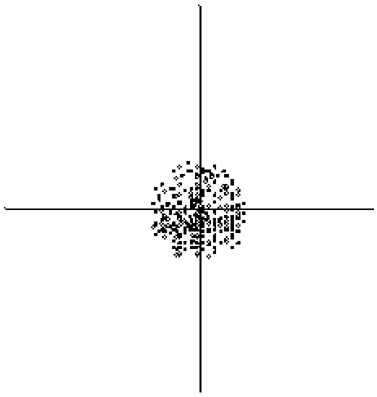
Justesse :

Un appareil est **juste** si la différence entre la mesure qu'il indique et la valeur exacte (inconnue) ne dépasse pas l'incertitude prévue.

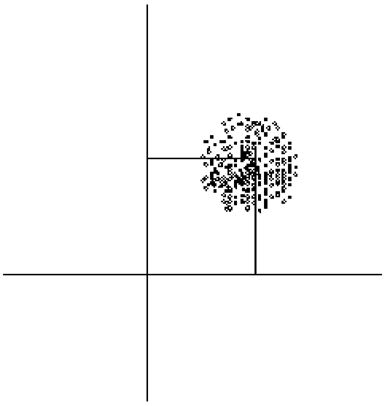
Ce n'est pas une qualité primordiale, parce que l'appareil faux provoque une erreur systématique qu'il est possible de corriger lorsqu'elle est connue.

Précision:

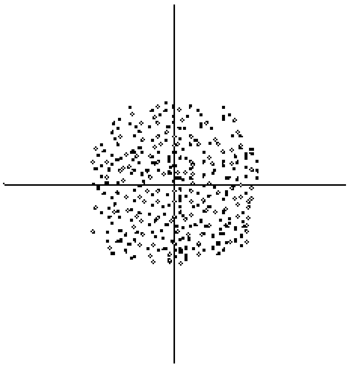
Une mesure est précise lorsque la dispersion des mesures expérimentales successives est faible.



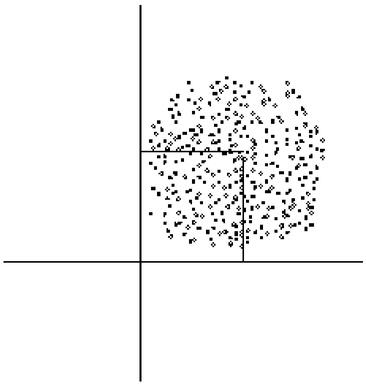
Appareil de mesure précis mais faux



Appareil de mesures juste et précis



Appareil de mesures juste mais non précis



Appareil de mesures faux et non précis

1-3 : Les vecteurs :

1-3-1 : Définition :

Un vecteur, par définition, est ce qui caractérise une translation. Une translation est un déplacement rectiligne sans rotation.

L'image d'un point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{(AB)}$ est le point D tel que ABDC est un parallélogramme.

Translation

La translation qui transforme un point A en un point B est la translation de vecteur $\overrightarrow{(AB)}$

Attention : il s'agit du parallélogramme ABDC et non ABCD.

Caractérisation d'un vecteur :

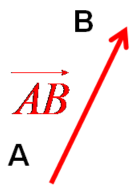
Un vecteur se caractérise par :
▸ sa direction ▸ son sens ▸ sa longueur

1-3-2 : Notion de vecteur de l'espace :

La notion de vecteur du plan se généralise sans difficulté à l'espace.
Soient A et B deux points distincts de l'espace.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est parfaitement déterminé par :

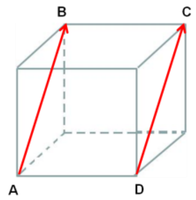
- sa direction : celle de la droite (AB),
- son sens : de A vers B,
- sa norme : la distance AB aussi notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.



Les vecteurs de l'espace ont les mêmes propriétés que les vecteurs du plan.

Vecteurs égaux :

Deux vecteurs égaux sont deux vecteurs qui ont même direction, même sens et même longueur.
Soient A,B,C et D quatre points de l'espace.
Les deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

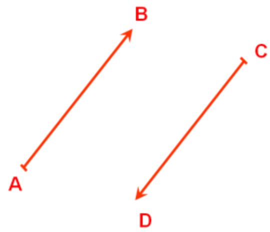


- si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur,
- si et seulement si ABCD est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Vecteurs opposés :

Soient A,B,C et D quatre points de l'espace.
Les deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont opposés si et seulement si ils ont même direction, des sens opposés et même norme.



$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont opposés

si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Somme de deux vecteurs :

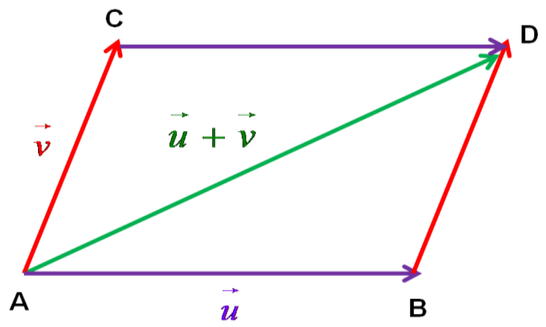
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires,

on peut obtenir la somme $\vec{u} + \vec{v}$ de ces deux vecteurs en utilisant les deux méthodes utilisées dans le plan :

- la règle du parallélogramme,
- la relation de Chasles.

Règle du parallélogramme :



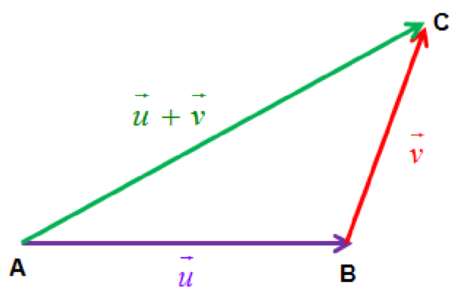
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$$

où D est le point tel que ABDC est un parallélogramme.

Relation de Chasles :



$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Produit d'un vecteur par un scalaire :

1-3-3 : Algèbre vectorielle :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et soit k un nombre réel.

On définit le vecteur $k\,\vec{u}$ de la façon suivante :

-> Si k=0 alors $k\vec{u} = 0\vec{u} = \vec{0}$

-> Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k\vec{u} = 0\vec{u} = \vec{0}$

-> Si $k \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $k\,\vec{u}$ est le vecteur qui a :

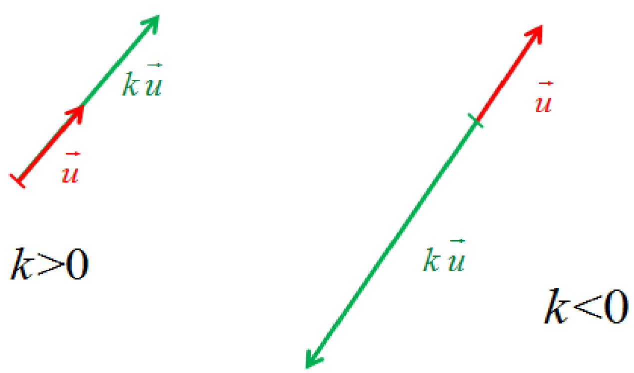
- même direction que $\vec{u}$.

- même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et sens contraire à celui de $\vec{u}$ si $k<0$

pour norme celle de; $\vec{u}$ multipliée par |k| :

$\left\| k\,\vec{u} \right\| = |k|.\left\| \vec{u} \right\|$.

Produit d'un vecteur par un scalaire :



Calcul vectoriel :

L'addition des vecteurs et la multiplication d'un vecteur
par un scalaire dans l'espace ont les mêmes propriétés
que dans le plan.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et k et k' deux nombres réels.
Alors

$$(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

$$k.(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$$

Vecteurs colinéaires :
Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si et seulement si l'un des deux est le produit de l'autre par un scalaire

1) Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0\vec{u}$.

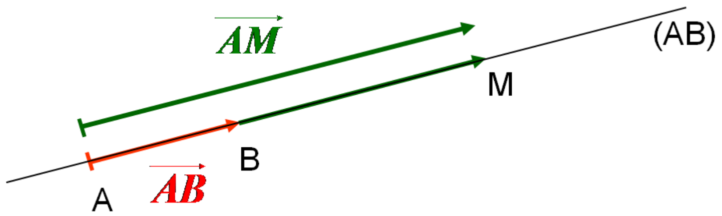
2) Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Vecteurs colinéaires et droites

Soient A et B deux points distincts de l'espace.
Un point M de l'espace appartient à la droite (AB)
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

On a donc :
le point M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un nombre réel t tel que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$$



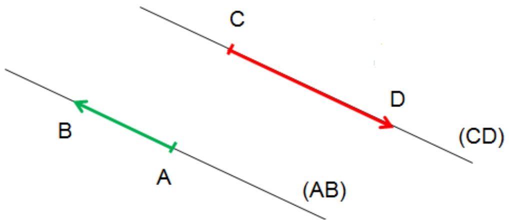
Vecteurs colinéaires et droites

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

- Les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Les deux droites (AB) et (CD)
sont parallèles.



Vecteurs unitaires :

Les vecteurs unitaires dont la longueur est l'unité de longueur sont appelés vecteurs unitaires. Si *V*1 est un vecteur de longueur *V*1 *>0,* alors *V*1 /*V*2 = *u* est un vecteur unitaire de même direction que *V*1 et *V*2 = *V1.u.*

Vecteurs unitaires orthogonaux :

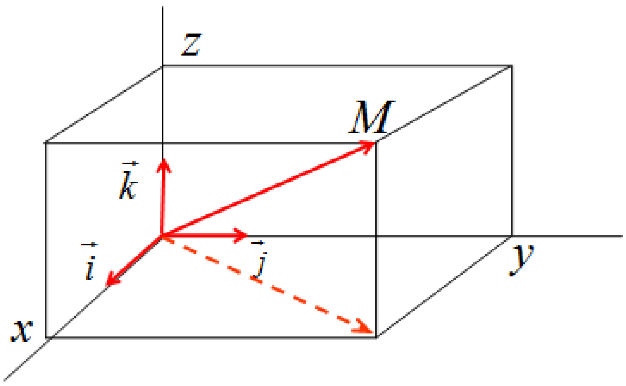
Les vecteurs unitaires orthogonaux *i, j* et *k* sont des vecteurs unitaires perpendiculaires deux à deux qui sont dirigés positivement le long des axes o*x, oy* et *oz* d'un système d'axes orthogonaux.

Nous utilisions un trièdre direct. Le sens d'un angle est donné par la relation d'un tire-bouchon qui tourne d'un angle de *90°* de *ox* à *oy* : si le trièdre est direct, le tire bouchon avancera dans la direction de oz. En général trois vecteurs*V*1, *V*2 et *V*3 non coplanaires et de même origine sont dits former un trièdre si un tire-bouchon qui tourne d'un angle inferieur à 180°, de *V*1 vers *V*2 avance dans le sens de *V*3.

Composantes des vecteurs :

L'origine de tout vecteur OM=V dans l'espace à 3 dimensions peut être l'origine O d'un système d'axes orthogonaux.

Soient (x, y, z) les coordonnées rectangulaires de l'extrémité du vecteur V d'origine O. les vecteurs composantes du vecteur V respectivement dans les directions x, oy et oz. x, y, z sont appelés composantes de V suivant respectivement les axes ox, oy et oz. La somme ou résultante de x. i, y. j et z.k est le vecteur V, ce qui l'on peut écrire : V = x. i + y. j + z. k , le module de V et V = $(x2 + y2 + z2)^{1/2}$.



Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

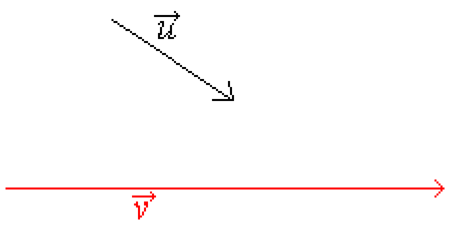
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et de même sens est le produit des normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et de sens contraires est l'opposé du produit des normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u}.\vec{v}$

Produit scalaire de deux vecteurs quelconques

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u'}\cdot\vec{v}$ ou $\vec{u'}$ est la projection orthogonale du vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v}$.
Remarque, on pourrait définir de la même façon :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v'}$ avec $\vec{v'}$ est la projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$.



- **Propriétés sur le produit scalaire** :
  quelque soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel a on a :
  1) $\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}$
  2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
  3) $\vec{u}\cdot(a\vec{v}) = a(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (a\vec{u})\cdot\vec{v}$
  4) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
  5) $\vec{u}\cdot\vec{0} = 0$
  6) $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$
  7) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$
  8) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- Les propriétés 7) et 8) sont des définitions possibles du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- **Expression analytique du produit scalaire dans le plan muni d'un**

repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Si (x ; y) et (x' ; y') sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$ dans la base orthonormale ($\vec{i}$; $\vec{j}$) alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x\,x' + y\,y'$

- **Expression analytique du produit scalaire dans l'espace plan muni d'un repère orthonormal** (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$)
  Si *(x ; y ; z)* et *(x' ; y'; z')* sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$ dans la base orthonormale ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x\,x' + y\,y' + zz'$

produit vectoriel :

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, est un vecteur $\vec{W}$, noté $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ de :

- direction : $\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$
- sens : trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ direct
- norme : $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\| \; \|\vec{V}\| \; \left|\sin(\vec{U}, \vec{V})\right|$

$\|\vec{W}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. En effet, $AH = OA \sin\theta = \|\vec{U}\| \; \left|\sin(\vec{U}, \vec{V})\right|$ et l'aire du parallélogramme devient :

$$OB \times AH = \|\vec{V}\| \; \|\vec{U}\| \; \left|\sin(\vec{U}, \vec{V})\right|.$$

Forme analytique :

En posant U_x, U_y, U_z et V_x, V_y, V_z les composantes respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le vecteur défini par la relation :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \left(U_y V_z - U_z V_y\right)\vec{i} + \left(U_z V_x - U_x V_z\right)\vec{j} + (U_x V_y - U_y V_x)\vec{k}$$

sachant que :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \;;\; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \;;\; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

Disposition pratique :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_y V_z - U_z V_y \\ U_z V_x - U_x V_z \\ U_x V_y - U_y V_x \end{bmatrix}$$

Pour obtenir les composantes du produit vectoriel :

1. Ajouter dans chacune des colonnes des composantes de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$ les composantes sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2. Effectuer la différence des "produits en croix"

Propriétés de la multiplication scalaire :

Non Commutativité : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$

Bilinéarité : $\begin{cases} \left(\vec{U} + \vec{V}\right) \wedge \vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{W} + \vec{V} \wedge \vec{W} \\ \left(\alpha \vec{V}\right) \wedge \left(\beta \vec{V}\right) = (\alpha\beta)\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \; (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}) \end{cases}$

Relation :

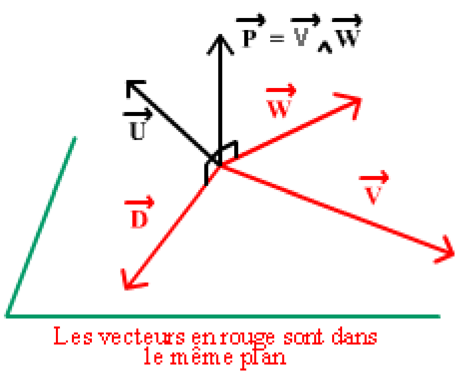
$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$ si $\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$ ou $\vec{U} \parallel \vec{V}$

Double produit vectoriel

On appelle double produit vectoriel entre trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ le vecteur $\vec{D}$ ou $\vec{D}'$ défini par :

$$\vec{D} = \vec{U} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right) = \left(\vec{U} \cdot \vec{W}\right)\vec{V} - \left(\vec{U} \cdot \vec{V}\right)\vec{W}$$

ou $\vec{D}' = \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \wedge \vec{W} = \left(\vec{U} \cdot \vec{W}\right)\vec{V} - \left(\vec{V} \cdot \vec{W}\right)\vec{U}$



Le produit vectoriel $\vec{P} = \vec{V} \wedge \vec{W}$ est représenté par un vecteur perpendiculaire au plan défini par $\vec{V}$ et $\vec{W}$. Le vecteur $\vec{D} = \vec{U} \wedge \vec{P}$ perpendiculaire à $\vec{P}$ se trouve dans le plan des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$. Le vecteur $\vec{D}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$:

$\vec{D} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{W}$ avec $\alpha = \vec{U}\cdot\vec{W}$ et $\beta = -\vec{U}\cdot\vec{V}$

Dans le cas de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nous avons :

$$\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) \wedge \vec{k} = \left(\vec{k} \wedge \vec{i}\right) \wedge \vec{j} = \left(\vec{j} \wedge \vec{k}\right) \wedge \vec{i} = \vec{0}$$

$$\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) \wedge \vec{i} = \vec{j} \;;\; \left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad \text{etc...}$$

Exemple :
Dans un repère R_0 fixe, rapporté à une base orthonormée (O, i, j, k), on considère les deux vecteurs suivants :

$\vec{V}_1 = 2t\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{V}_2 = 4t\vec{i} - t\vec{j} - t\vec{k}$ où t est le temps.

Calculer $d(\vec{V}_1.\vec{V}_2)/dt$ et $(d\vec{V}_1 x \vec{V}_2)/dt$:

1. Par le calcul direct
2. En utilisant les propriétés de dérivée vectorielle.

Propriétés du produit mixte

Non commutativité : $\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) = -\left(\vec{W}, \vec{V}, \vec{U}\right)$

Multilinéarité par rapport à chacun des vecteurs : cas du vecteur $\vec{U}$

$$\begin{cases} \left(\vec{U_1} + \vec{U_2}, \vec{V}, \vec{W}\right) = \left(\vec{U_1}, \vec{V}, \vec{W}\right) + \left(\vec{U_2}, \vec{V}, \vec{W}\right) \\ \left(\alpha\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) = \alpha\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) \end{cases}$$

Les operateurs différentiels:

On donne les expressions suivantes des opérateurs mathématiques **gradient**, **divergence** et **rotationnel**, en coordonnées scalaires dans un espace à trois dimensions. Tous ces opérateurs sont construits à partir de l'opérateur fondamental **Nabla** : $\vec{\nabla}$

Simplement appliqué à un champ scalaire P(x,y,z), l'opérateur nabla donne le gradient du champ. Le gradient obtenu est lui un champ vectoriel.

Gradient : $$\vec{\nabla} P = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Le produit scalaire entre l'opérateur nabla et un champ vectoriel U (défini par ses trois composantes : $u_x(x,y,z)$, $u_y(x,y,z)$, et $u_z(x,y,z)$), donne la divergence de ce champ vectoriel. La divergence obtenue est elle un champ scalaire.

Divergence : $$\vec{\nabla} \circ \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Le produit vectoriel entre l'opérateur nabla et un champ vectoriel U (défini par ses trois composantes : $u_x(x,y,z)$, $u_y(x,y,z)$, et $u_z(x,y,z)$), donne le rotationnel de ce champ vectoriel. Le rotationnel obtenu est lui aussi un champ vectoriel.

Rotationnel : $$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & u_x \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & u_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & u_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Série N°1 Rappels mathématiques

Exercice 1

Dans un repère R_0 fixe, rapporté à une base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux vecteurs suivants :

$\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ $\quad \vec{V}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$

1. Représenter les deux vecteurs dans la base considérée.
2. Calculer leur module ; leur produit scalaire et leur angle.
3. Calculer les composantes (cosinus directeurs) de leurs vecteurs unitaires.
4. Calculer et représenter $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$
5. Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 X \vec{V}_2$.

Exercice 2

Dans un repère R_0 fixe, rapporté à une base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux vecteurs suivants :

$\vec{V}_1 = 2t\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{V}_2 = 4t\vec{i} - t\vec{j} - t\vec{k}$ où t est le temps.

Calculer $d(\vec{V}_1.\vec{V}_2)/dt$ et $(d\vec{V}_1 x \vec{V}_2)/dt$:

3. Par le calcul direct
4. En utilisant les propriétés de dérivée vectorielle.

Exercice3.
Vous mesurez la longueur, la largeur et la hauteur de la salle de physique et vous obtenez les valeurs suivantes:
• longueur 10.2 ± 0.1 m
• largeur 7.7 ± 0.08 m
• hauteur 3.17 ± 0.04 m
Calculez:
a) le périmètre
b) la surface du sol
c) le volume de la salle et donnez les résultats de vos calculs avec leurs incertitudes absolues.

Exercice 4 :

La fréquence f de vibration d'une goutte d'eau peut s'écrire sous la forme :

$f = kR^{\alpha}.p^{\beta}.\tau^{\gamma}$, où k est une constante sans dimension. R est le rayon de la goutte, p sa masse volumique. τ est la tension superficielle définie par une force par unité de longueur. Déterminer par une analyse dimensionnelle les valeurs des paramètres α , ß et γ .