Chapitre 2: CINEMATIQUE DU POINT

1- Définitions :

La cinématique : Elle permet d'étudier les mouvements d'un mobile, par rapport à un repère de référence, en fonction du temps indépendamment des causes qui les produisent. Elle a pour but de préciser les trajectoires et les lois horaires.

En physique, la cinématique est la discipline de la mécanique qui étudie le mouvement des systèmes matériels. On étudiera des systèmes de petites dimensions assimilés à un point (système ponctuel). Le mouvement d'un objet, représentant le système, est défini par :

a) ***le référentiel d'étude*** auquel on associe une horloge pour le repérage du temps. Un référentiel d'étude est composé d'un solide par rapport auquel on étudie le mouvement du système matériel. Le repère lié au référentiel est constitué de trois vecteurs unitaires orthogonaux et d'un point origine O. Exemple le repère cartésien R orthonormé: $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

b) sa trajectoire qui correspond à l'ensemble de ses positions successives au cours du temps.

c) son vecteur vitesse en chaque instant

d) son vecteur accélération en chaque instant

2 – Référentiel , trajectoire et position du point matériel :

A- ***Référentiel d'étude***

L'étude du mouvement d'un objet et l'expression de sa position, de sa vitesse ou de son accélération nécessitent au préalable le choix d'un référentiel. Rappels: Un référentiel est un solide de référence défini par un point et trois axes pointant dans des directions fixes. Les référentiels les plus courants sont:

- *Le référentiel terrestre*: il constitué d'un point du sol et de trois axes (en général un axe vertical et deux axes dans le plan horizontal). On l'utilise pour décrie les mouvements à petite échelle des objets qui nous entourent.

- *Le référentiel géocentrique*: il est constitué du centre de la Terre et de trois axes pointant vers des étoiles suffisamment lointaines pour être considérées comme fixes. On l'utilise pour décrire des mouvements à l'échelle de la planète pour lesquelles la rotation de la Terre ne peut être négligée (en particulier pour décrire le mouvement des satellites)

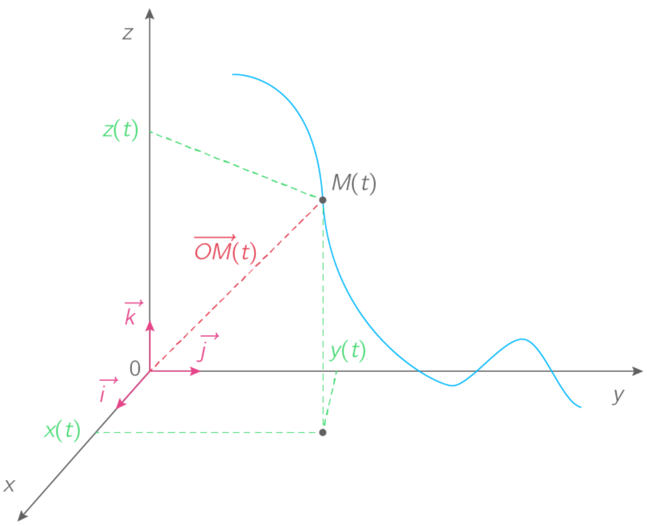
- ***Le référentiel héliocentrique***: il est constitué du centre du Soleil et de trois axes pointant vers des étoiles suffisamment lointaines pour être considérées comme fixes. Ce référentiel est utilisé pour décrie des mouvements à l'échelle du système solaire (comme celui des planètes).

B- Trajectoire :

La trajectoire d'un mobile (point matériel) est le lieu géométrique des positions successives occupées par le mobile au cours du temps par rapport au repère choisi. Elle est définie par trois fonctions du temps : ***x(t), y(t) et z(t)*** qui permettent de déterminer l'équation horaire du mouvement ***s = f(t)*** . **s** est appelé abscisse curviligne et égale à la longueur de l'arc M_0M , M_0 est la position initiale du mobile

C- Position du point matériel :

La position du point matériel peut être définie au cours du temps en fonction du vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}\,(t)$ (Le vecteur position est le vecteur repérant la position d'un point mobile *M* le long d'une trajectoire à un instant *t* par rapport à l'origine *O* d'un repère associé à un référentiel d'étude); pour cela il est nécessaire de considérer un référentiel (fixe et non déformable au cours du temps) formé d'un repère orthonormé (défini par son origine, sa base et ses axes) menu d'une horloge qui indique le temps(fig.2-1).



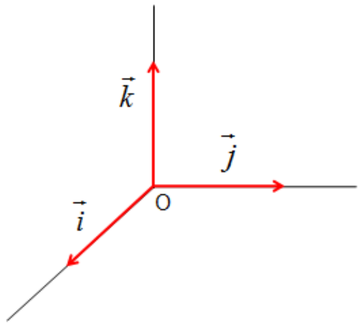
(Fig.2-1).Le vecteur position

On peut aussi repérer ce vecteur en utilisant les différents systèmes de coordonnées

3- Repères ou référentiels : Système de coordonnées

Repères de l'espace

Un repère de l'espace est un quadruplet $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ formé
- d'un point O appelé origine du repère,
- d'un triplet $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires.



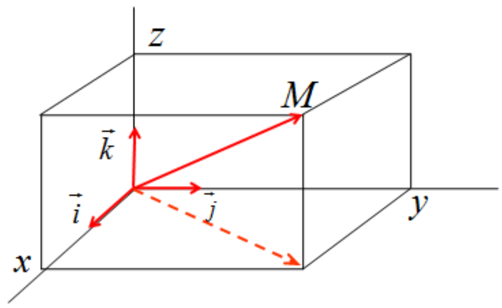
Si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est dit orthogonal.

Si de plus on a $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$ On dit que le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est orthonormé.

Coordonnées d'un point de l'espace

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace il existe un unique triplet (x,y,z) de nombres réels tels que:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



s'appelle l'abscisse de M
s'appelle l'ordonnée de M s'appelle la côte de M

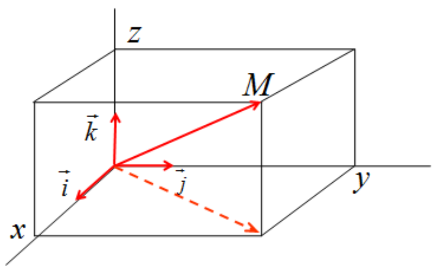
(x,y,z) sont les coordonnées du point M dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Coordonnées d'un point de l'espace

On note

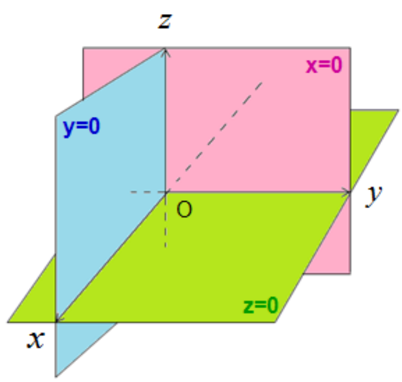
$M(x,y,z)$ ou $\overrightarrow{OM}(x,y,z)$

ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



Plans de coordonnées

Un point M de coordonnées (x,y,z) dans le



repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace appartient au plan (xOy) si et seulement si z=0

z=0 est une équation du plan (xOy).

De même, le plan (yOz) a pour équation x=0.
Le plan (xOz) a pour équation y=0.
Les trois plans (xOy) , (yOz) et (xOz) sont les trois plans coordonnées.

Règles de calcul

Si dans un repère on a $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{u'}(x',y',z')$, alors

$\vec{u}+\vec{u'}$ a pour coordonnées $(x+x',y+y',z+z')$

et, pour tout nombre réel k ,

& $k\,\vec{u}$ a pour coordonnées (kx,ky,kz)

Règles de calcul

Si A et B sont deux points de l'espace de coordonnées respectives (x_A,y_A,z_A) et (x_B,y_B,z_B) dans un repère, alors

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées:

$$\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$$

Le milieu de [AB] a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

Si le repère est orthonormé :

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$$

4-Coordonnées cartésiennes :

Dans un repère orthonormé d'axes ox, oy, oz et de base base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormée. (O est l'origine du repère), la position du point M au cours du temps est définie par le vecteur position

$$\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

x , y , z sont les coordonnées cartésiennes du point M .

Le module de $\overrightarrow{OM}$ est : $\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Pour un élément de volume on a en coordonnées cartésiennes : $d\tau=dx\,dy\,dz$

4-1- Vecteurs vitesses et accélérations:

A- La vitesse :

Le vecteur vitesse du point M est le vecteur lié d'origine M égal au vecteur dérivé par rapport au temps du vecteur position :

$$\text{si} \quad \vec{r} = \vec{OM} \quad \text{alors :} \quad \vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

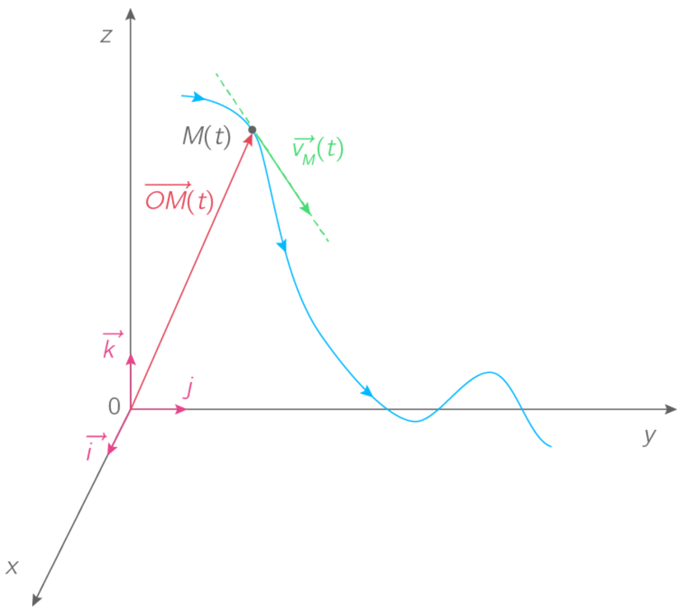
Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Le module du vecteur vitesse est la quantité :

$$v = \frac{ds}{dt} = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$

ds est la variation élémentaire de l'abscisse curviligne. (fig. 2-2).



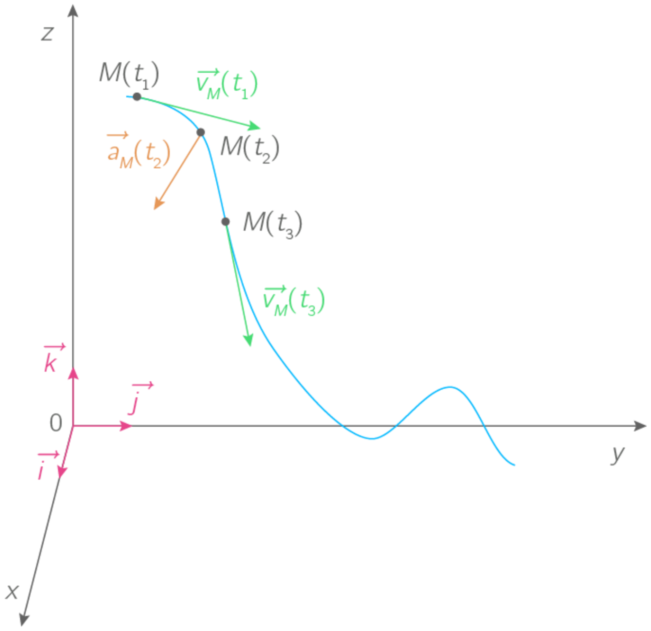
(Fig.1-2).Le vecteur vitesse

Remarque :

La vitesse instantanée est portée par la tangente à la trajectoire au point M alors que la vitesse moyenne est portée par la corde MM'.

B- L'accélération:

L'accélération à un instant donné d'un mobile M, considéré comme un point matériel, est le vecteur dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps.



(*Fig.2-3).Le vecteur accélération*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Le module **a** du vecteur accélération $\vec{a}$ est la quantité :

$$a = \left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

L'unité de l'accélération est le mètre par seconde par seconde (**m / s²**) ou **ms⁻²**

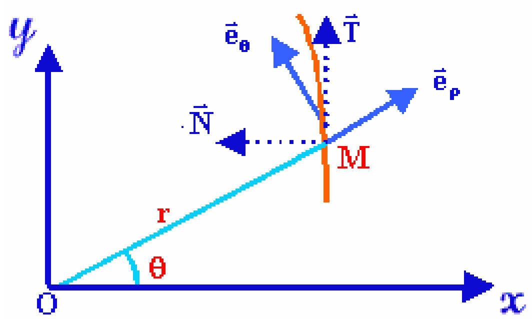
5- Coordonnées polaires ou semi-polaires:

En coordonnées polaires, la position de M est repérée par le rayon vecteur OM de module ρ **(t)** et par l'angle polaire θ **(t)** qui peuvent varier en fonction du temps :

$x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$

Pour un déplacement élémentaire, on doit avoir deux accroissements **$d\rho$** et **$d\theta$**

L'élément de surface est égal à $\rho d\rho\, d\theta$.



(Fig2-4) coordonnées polaires

On définit les vecteurs unitaires ($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$) et dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) :

$$\vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = -\vec{e}_\rho$$

Dans la base des coordonnées polaires ($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$), le vecteur position s'écrit

$$\vec{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \qquad \vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho - \dot{\rho}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_\rho - \left(\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_\theta$$

Remarque : Les accélérations radiale et orthoradiale sont différentes de celles normale et orthonormale.

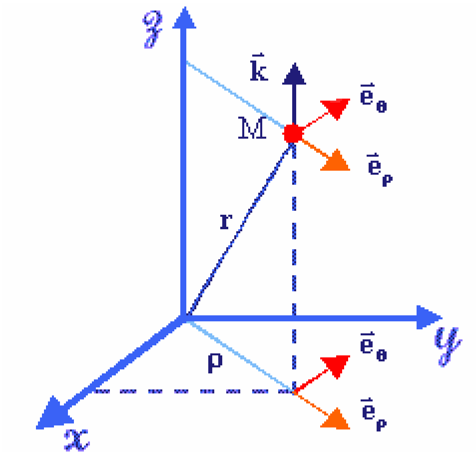
6. Coordonnées cylindriques :

En coordonnées cylindriques, la position du point M est repérée par le rayon polaire **ρ (t)**, par l'angle polaire **θ (t)**, et la cote **z(t)**, qui peuvent varier en fonction du temps : Les coordonnées cylindriques ρ, θ et **z** du point M sont liées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes:

$$x = \rho\cos\theta \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho\sin\theta \qquad \theta = \mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x} \qquad \theta\ \text{est défini à}\ 2\pi\ \text{prés}$$

$$z = z \qquad z = z \qquad \text{avec}\ r^2 = \left|\vec{OM}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



(Fig2-5) coordonnées cylindriques

Dans la base orthonormée des coordonnées cylindriques ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) le vecteur position s'écrit : $\vec{OM} = \rho\, \vec{e}_\rho + z\vec{k}$

Pour un élément de volume en coordonnées cylindriques on a: **dτ = ρ dρ dθ dz**

En utilisant les résultats obtenus en coordonnées polaires et en les complétant, on obtient pour :

· ***Le vecteur vitesse***

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho}\, \vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\, \vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$

· ***Le vecteur accélération s'écrit :***

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\theta}^2)\, \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\, \vec{e}_\theta + \ddot{z}\, \vec{k}$$

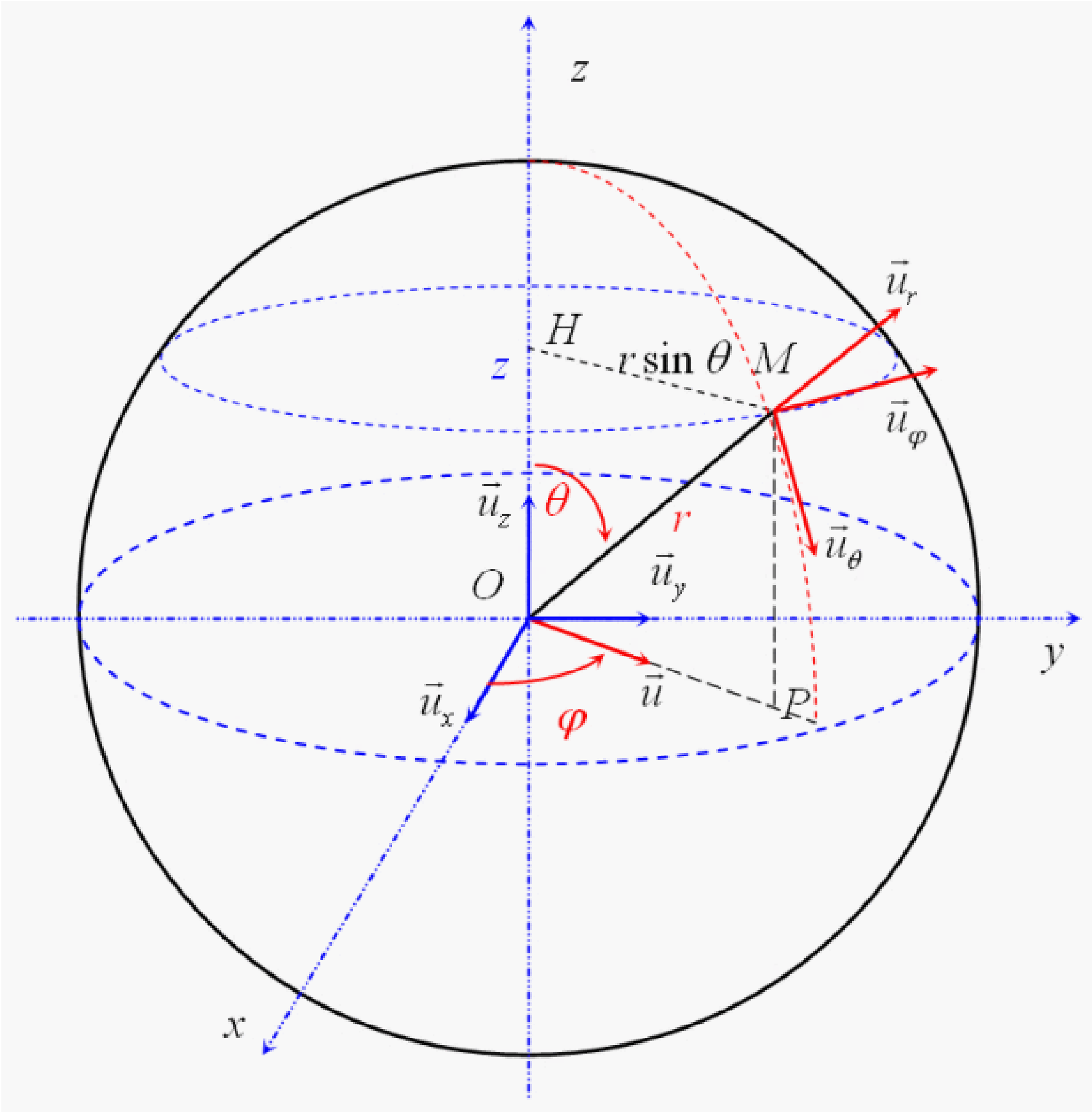
Remarque

Dans le cas d'un mouvement plan dans le plan $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\phi})$, on obtient facilement $\vec{v}$et $\vec{\gamma}$ en supprimant dans les expressions ci-dessus les composantes en z.

Il faut veiller alors, à ne pas confondre accélération normale et accélération portée par le rayon vecteur!

7- coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques (voir figure1- 6) permettent de repérer un point sur une sphère de rayon $OM = r$. C'est typiquement le repérage d'un point sur la Terre pour lequel il suffit alors de préciser deux angles : la latitude et la longitude.



(Fig2-6) coordonnées Sphiriques

Le système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$

Coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

- La coordonnée radiale $r$correspond à la distance de l'origine Odu repère au point M.
- La coordonnée angulaire θcorrespond à l'angle que fait OMavec l'axe Oz. Cet angle, compris entre 0et π, est appelé colatitude (angle complémentaire de la latitude) ou zénith.

- La coordonnée angulaire ϕ correspond à l'angle que fait le plan défini par l'axe Oz et OM avec l'axe Ox. Cette angle, compris entre 0 et 2π, est appelé la longitude ou l'azimut.

<u>La base des coordonnées sphériques</u>

Le vecteur position permet de définir le premier vecteur de la base :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \qquad (6)$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ est suivant la direction et le sens de O vers M: c'est le vecteur *radial* (suivant le rayon).

Lorsque seul l'angle θ varie le point M décrit un demi-cercle (un méridien) de rayon r. Le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ est tangent à ce demi-cercle (suivant le méridien) orienté comme θ.

Lorsque seul l'angle ϕ varie le point M décrit un cercle de rayon $r \sin \theta$. Le vecteur unitaire $\vec{u}_\phi$ est tangent à ce cercle (suivant un parallèle) orienté comme ϕ.

Les vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ forment une base orthonormée directe. Cette base est « mobile » dans le repère.

<u>Relation entre les coordonnées sphériques et cartésiennes</u>

La projection H du point M sur l'axe Oz donne la cote :

$$z = OH = r \cos \theta \qquad (7a)$$

Si P est la projection de M sur le plan xOy on a : $OP = r \sin \theta$

Les coordonnées x et y du point M sont celles du point P c'est à dire :

$$x = OP \cos\phi = r\sin\theta \cos\phi \qquad (7b)$$

$$y = OP \sin\phi = r\sin\theta\sin\phi \qquad (7c)$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ suivant OP a pour expression : $\vec{u} = \cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_y$

Le vecteur unitaire $\vec{u}_\phi$ est directement perpendiculaire à $\vec{u}$. Il fait un angle $(\phi + \pi/2)$ avec l'axe Ox et s'écrit :

$$\vec{u}_\phi = -\sin\phi\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y \qquad (7d)$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ a pour expression :
$\vec{u}_r = \sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\,\vec{u}_z = \sin\theta\,[\cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_y] + \cos\theta\,\vec{u}_z$

$$\vec{u}_r = \sin\theta\cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\sin\phi\,\vec{u}_y + \cos\theta\,\vec{u}_z \qquad (7e)$$

Enfin, le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ est directement perpendiculaire à $\vec{u}_r$ et s'écrit :

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{u} - \sin\theta\,\vec{u}_z = \cos\theta\,[\cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_y] - \sin\theta\,\vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\sin\phi\,\vec{u}_y - \sin\theta\,\vec{u}_z \qquad (7f)$$

Vitesse

Le rayon vecteur s'écrit $\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$ où $\overrightarrow{OM}$ est une fonction vectorielle du temps et r, θ, ϕ des fonctions scalaires du temps. La base sphérique $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\phi})$ est une base locale, l'orientation des vecteurs dépend de M, donc du temps. Dans ce cas, les directions des vecteurs de la base dépendent des deux variables θ et ϕ, elles-mêmes fonction du temps.

Le calcul de la vitesse conduit à l'expression $\vec{v} = r'\vec{u_r} + r\theta'\vec{u_\theta} + r\sin\theta\phi'\vec{u_\phi}$

Accélération

Les composantes de l'accélération sont développées ci-dessous :

- $\vec{\gamma} \cdot \vec{u_r} = \gamma r = r'' - r(\theta'^2 + \sin^2\theta\phi'^2)$
- $\vec{\gamma} \cdot \vec{u_\theta} = \gamma\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{d(r^2\theta')}{dt} - r\sin\theta\cos\theta\phi'^2$
- $\vec{\gamma} \cdot \vec{u_\phi} = \gamma\phi = \dfrac{1}{(r\sin\theta)}\dfrac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\phi')$

8- Les mouvements rectilignes et circulaires :

8-1) Les mouvement rectiligne : Il existe 3 types de mouvements rectilignes:

a) Mouvement rectiligne uniforme :

On appelle mouvement rectiligne uniforme un mouvement suivant une droite (rectiligne) et dont la vitesse est constante (uniforme).

On en déduit que : $x(t) = V_o.t + x_o$ $\quad V_x$= **constante** = V_o $\quad A_x = 0$

b) Mouvement rectiligne uniformément varié :

C'est un mouvement rectiligne où l'accélération est constante.

Les vecteurs vitesse $\vec{V}(M)$ et accélération $\vec{A}(M)$ sont colinéaires.
D'après ce que nous avons vu précédemment :

$$x = \frac{A_o}{2}.t^2 + V_o.t + xo \ (1)$$

$$V_x = A_o.t + V_o \ (2)$$

$$A = A_x = A_o = \textbf{constante} \ (3)$$

De la relation (2) on déduit que $t = \frac{V - V_o}{A_o}$. En reportant ce résultat dans l'équation (1) nous obtenons une relation entre x, V et A :

$$V^2 - V_o^2 = 2.A.(x - x_o) \ (4)$$

A>0	V augmente	Mouvement uniformément accéléré
A<0	V diminue	Mouvement uniformément décéléré

Exemple: mouvement du centre d'inertie d'un palet sur un plan horizontal sans frottement

Dans un référentiel donné le mouvement d'un point M est rectiligne uniforme si en chaque instant son vecteur vitesse est constante :

$\vec{V}$ = constante $\Leftrightarrow$ mouvement rectiligne uniforme Le vecteur accélération instantanée est égal au vecteur nul quelque soit t en effet: $\vec{a}(t) = (\frac{d\vec{v}}{dt})_t = \vec{0}$

Allure des courbes x(t), $v_x(t)$ et $a_x(t)$ au cours d'un mouvement rectiligne uniforme

c) mouvement rectiligne uniformément accéléré :

Dans un référentiel donné le mouvement d'un point M est rectiligne uniformément accéléré si en chaque instant son vecteur accélération est constant et que sa trajectoire est une droite:

$\vec{a}$ = constante, trajectoire une droite

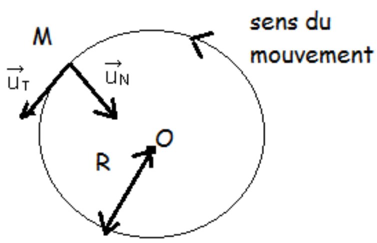
$\Leftrightarrow$ mouvement rectiligne uniformément varié

Allure des courbes x(t), $v_x(t)$ et $a_x(t)$ au cours d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

2) mouvement circulaire

Dans le cas des mouvements circulaires on utilisera le repère de Frénet $(M, \vec{U}_N, \vec{U}_T)$ pour exprimer les vecteurs vitesse accélération et position. Ce repère est constituée d'un point M ou se trouve le mobile à l'instant t et de deux vecteurs orthonormés $\vec{u}_N$ (n de normale à la trajectoire) et $\vec{u}_T$(T de tangent à la trajectoire)

Le vecteur unitaire $\vec{u}_T$ est tangent à la trajectoire, au point M où se trouve le mobile. Ce vecteur est orienté arbitrairement (pas nécessairement dans le sens du mouvement).Le vecteur unitaire $\vec{u}_N$ est normal à la trajectoire. Il est orienté vers l'intérieur de la courbe.

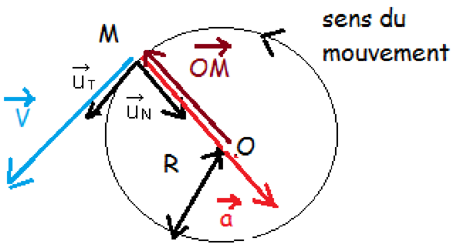


Dans ce cours on verra 2 types de mouvement circulaire.

a) mouvement circulaire uniforme :

Dans un référentiel donné le mouvement d'un point M est circulaire uniforme si en chaque instant la valeur v de la vitesse est constante et que la trajectoire est une portion de cercle de rayon R. Le vecteur accélération est centripète (orienté vers le centre de la trajectoire). Les coordonnées des vecteurs accélération, vitesse et position

$$\overrightarrow{OM} = -R.\vec{u}_N$$
$$\vec{v} = v.\vec{u}_T$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_n.\vec{u}_N + a_T.\vec{u}_T$$
$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}.\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N$$
$$a_N = \frac{v^2}{R} : \text{coordonnée de l'accélération normale}$$
$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ (car } v = \text{constante)} : \text{coordonnée de l'accélération tangentielle}$$



sont, dans la base de Frénet:

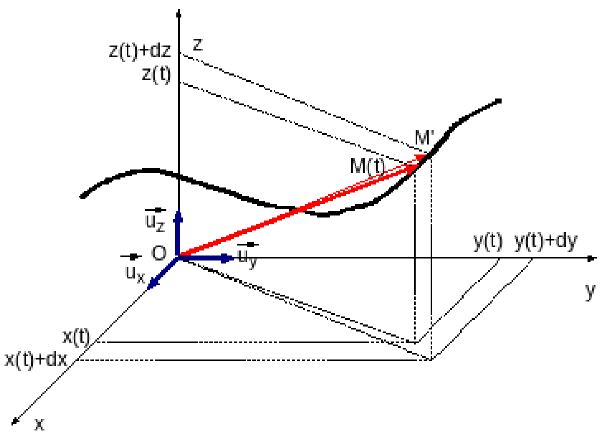
$\overrightarrow{OM} = -R.\vec{u}_N$
$\vec{v} = v.\vec{u}_T$
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_N.\vec{u}_N + a_T.\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}.\vec{u}_T$
$a_N = \frac{v^2}{R}$: coordonnée de l'accélération normale
$a_T = \frac{dv}{dt}$: coordonnée de l'accélération tangentielle

Exemple: le mouvement du centre d'inertie des planètes dans le référentiel héliocentrique.

b) mouvement circulaire non uniforme :

Dans un référentiel donné le mouvement d'un point M est circulaire non uniforme si en chaque instant la valeur de sa vitesse n'est pas constante et que la trajectoire est une portion de cercle de rayon R. En chaque instant les coordonnées des vecteurs accélération, vitesse et position sont dans le repère de Frénet.

déplacement élémentaire : Exemple de déplacement élémentaire dans l'espace



On suppose que le point M subit un déplacement élémentaire pour se retrouver en M'.

Dans le repère $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, le point M' a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \end{pmatrix}$.

Le déplacement élémentaire que vient de subir le point M est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$.

Cette quantité étant un infiniment petit, on peut l'écrire sous la forme :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z}$$

9-Mouvements relatifs

9-1-Les changements de référentiels

Introduction :

Avant d'aborder l'étude proprement dite du changement de référentiel, il est nécessaire de poser un certain nombre de définitions.

Définition du point coïncident :

Soit un référentiel R supposé fixe. Soit un autre référentiel R' mobile par rapport à R. L'étude a pour objet un point M qui se déplace. On appelle point coïncident P, le point fixe de R' qui à l' instant t coïncide avec le point M. Pour imager ce qu'est le point coïncidant, imaginons un voyageur M marchant dans un train lui même en mouvement. Le référentiel fixe R est lié à l'extérieur du train (le paysage).

Le référentiel en mouvement R' est celui qui est lié au train et avance avec le train.

A un instant t, la chaussure de la personne laisse une marque sur le plancher. Le point coïncidant à cet instant t est la marque P laissée par la personne.

Remarque 1 **:** A un instant t' ultérieur, le point P est différent du point M (la personne a continué sa marche dans le train). On peut alors définir un nouveau point coïncident P' qui sera la nouvelle marque laissée par sa chaussure à t'.

Remarque 2 **:** Si à l'instant t on a P = M, on a toutefois à priori v (P) # v (M). La vitesse de la marque laissée par la chaussure est différente de la vitesse du voyageur (sauf évidemment si ce dernier reste immobile dans le train !)

Autres définitions :

On appelle vitesse absolue (respectivement accélération absolue) la vitesse du point M (respectivement l'accélération de M) dans le référentiel fixe R.

On appelle vitesse relative (respectivement accélération relative) la vitesse du point M (respectivement l'accélération de M) dans le référentiel mobile R'.

On appelle vitesse d'entraînement (respectivement accélération d'entraînement) la vitesse du point P coïncident (respectivement l'accélération de P) dans le référentiel fixe R.

Dans l'exemple du voyageur, la vitesse absolue est la vitesse du voyageur par rapport à l'extérieur ; la vitesse relative est la vitesse du voyageur par rapport au train, et la vitesse d'entraînement est la vitesse de la marque de la chaussure sur le plancher (laquelle se trouve "entraînée" par le train).

Remarque 3 : Les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M}$ du même point M (respectivement dans R et dans R') sont différents, car O' # O.

9-2. Dérivation d'un vecteur par rapport au temps :

Soit R un référentiel (associé au repère cartésien de centre O et d'axes Ox, Oy, Oz) supposé fixe, et R' un référentiel en mouvement par rapport à R, associé à un repère cartésien de centre O' et d'axes O'x', O'y', O'z'. Le mouvement de R' peut se décomposer de la manière suivante :

- une translation du centre O'(dans le référentiel R) ;
- une rotation des axes O'x', O'y', O'z' (par rapport aux axes Ox, Oy, Oz).

Remarque 4 : Il ne faut pas confondre translation et mouvement rectiligne. La translation de R' par rapport à R est le mouvement du point O; ce mouvement peut être quelconque (éventuellement suivre un cercle !). La rotation de R' par rapport à R est le changement de direction des seuls axes O'x', O'y', O'z' par rapport aux axes Ox, Oy, Oz (sans rapport avec la trajectoire du point O')

On appelle $\vec{\omega}'_{R'/R}$ le vecteur rotation instantanée de R' par rapport à R, avec

$$\vec{\omega}'_{R'/R} = \Theta' \vec{k}$$

Θ' est la vitesse angulaire de rotation.

Soit $\vec{A}$ un vecteur mobile.

9-3-Loi de composition des vitesses et des accélérations :

A) Loi de composition des vitesses :

Nous avons vu que dans cette représentation les vecteurs positions s'écrivent dans les référentiels (R) et (R') :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r'} = \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$$

et que $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

Il s'agit d'obtenir la relation entre $\vec{V}$ et $\vec{V'}$. Pour ce faire, il suffit de dériver par rapport au temps la relation précédente après avoir exprimé $\overrightarrow{O'M}$ dans le référentiel (R'). On a alors :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$+ \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)$$

que l'on peut réécrire sous la forme : $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V'}$

*** Vitesse absolue et vitesse relative :**

$\vec{V}$ est la vitesse du mobile dans le référentiel absolu, on l'appelle "vitesse absolue" et

on la note : $\vec{V}_a = \vec{V} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{(R)}$

$\vec{V'}$ est la vitesse du mobile dans le référentiel relatif, on l'appelle "vitesse relative" et

on la note : $\vec{V}_r = \vec{V'} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{(R')} = \dfrac{dx'}{dt}\vec{i'} + \dfrac{dy'}{dt}\vec{j'} + \dfrac{dz'}{dt}\vec{k'}$

Il faut remarquer que lorsque la dérivation s'effectue dans (R) les vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont considérés constants et lorsqu'elle s'effectue dans (R'), ce sont les vecteurs $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ qui sont constants.

On écrit alors souvent :

$$\vec{V}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{(R)}$$

$$\vec{V}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{(R')}$$

*** Vitesse d'entraînement :**

Le vecteur vitesse d'entraînement est défini par :

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

Il représente la vitesse du point coïncidant, c'est-à-dire du point lié à (R') qui coïncide avec le point M à l'instant t.

On peut donc énoncer la loi de composition des vitesses de la façon suivante **:**

"La vitesse d'un mobile dans $(\mathbf{R})$ est la somme vectorielle de sa vitesse dans (R') et de la vitesse d'entraînement de (R') par rapport à (R'') $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$

Si le mouvement de (R') par rapport à (R) est uniquement un mouvement de translation, c'est-à-dire dans lequel les vecteurs $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ gardent la même direction au cours du temps, alors les dérivées $\frac{d\vec{i'}}{dt}, \frac{d\vec{j'}}{dt}, \frac{d\vec{k'}}{dt}$ s ' annulent et $\vec{V}_e$ s'écrit simplement

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

Dans ce cas particulier qui correspond à une translation de (R') par rapport à (R), la vitesse d'entraînement est tout simplement la vitesse de O' par rapport à O; autrement dit, c'est la vitesse de translation de (R') par rapport à (R).

Comme chaque mouvement est en général la composition d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation, on en déduit que les termes de $\vec{V}_e$ autres que décrivent le mouvement de rotation de (R') par rapport à (R), aspect que l'on va expliciter plus loin.

B) Loi de composition des accélérations :

Le vecteur accélération absolue $\vec{\gamma}_a$ de M s'obtient en dérivant par rapport au temps dans (R) le vecteur vitesse absolue :

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

$$\vec{\gamma}_a = \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}\right) + \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right)$$

$$+ 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

$\vec{\gamma}_a$ s'écrit donc sous la forme de trois groupes de termes.

*** Accélération relative :**

Le premier groupe représente l'accélération du mobile M dans le référentiel relatif (R'). Il exprime donc l'accélération relative $\vec{\gamma}_r$ de M:

$$\vec{\gamma}_r = \left[\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right]_{R'} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right]_{\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\,constants} \quad \vec{\gamma}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}$$

*** Accélération d'entraînement :**

Le second groupe de termes représente l'accélération du point coïncidant P de (R') dont les coordonnées x', y', z' sont constantes.; les dérivées par rapport au temps de x', y', z' sont donc nulles. Ce groupe de termes exprime l'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ de M:

$$\vec{\gamma}_e = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right]_{x',y',k' \text{ constants}}$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$$

Ce terme dépend des coordonnées relatives de M et du mouvement de R' dans R

*** Accélération complémentaire ou accélération de Coriolis :**

Le troisième groupe de termes n'a pas d'équivalent dans l'expression du vecteur vitesse absolue $\vec{V}_a$. On l'appelle "accélération complémentaire" $\vec{\gamma}_c$ ou "accélération de Coriolis" :

$$\vec{\gamma}_c = 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

Ce terme dépend à la fois de la vitesse relative de M par les termes $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$ et du changement d'orientation du référentiel mobile (R') par rapport à (R) par les termes $\frac{d\vec{i'}}{dt}, \frac{d\vec{j'}}{dt}, \frac{d\vec{k'}}{dt}$

Finalement, la loi de composition des accélérations s'écrit : $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$

Série N°2 Cinématique

Exercice 1

Un point matériel M se déplace le long d'une droite suivant l'équation horaire:

$x=8-3t^2$.

1. Représenter la position, la vitesse et l'accélération de M : x(t), v(t) et a(t)
2. Détruire la nature du mouvement

Exercice 2

Les coordonnées d'une particule sont données par les fonctions du temps :

$X= 2t$ et $y= 4t\,(t-1)$.

1. Donner l'équation et la nature de la trajectoire. La représenter graphiquement.
2. Calculer le vecteur vitesse et son module
3. Calculer le vecteur accélération et son module
4. Quelles sont les composantes normale et tangentielle de l'accélération?
5. Donner les expressions du rayon de courbure, des vecteurs unitaires tangentiel et normal en fonction du temps.

Exercice 3

Un mobile animé d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{i}$ constante, pénètre dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération : $\vec{a} = -kv^2\,\vec{i}$; k est une constante et v la vitesse instantanée.

1. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment ou le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant v(t).
2. En déduire l'équation du mouvement.
3. Montrer qu'après un parcours x, la vitesse est $v = v_0 e^{-kx}$.

Exercice 4

Soient deux points M_1 et M_2 repérés par leurs coordonnées sphériques

(r_1, Θ_1, Φ_1), (r_2, Θ_2, Φ_2). soit α l'angle entre OM_1 et OM_2

Calculer directement cos α et sin α.

Vérifier que l'on a bien $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Exercice 5

Soit un repère cartésien (O, X, Y, Z) un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z), cylindriques (ρ, Θ, z) et sphériques (r, Θ, Φ).

Soit un déplacement élémentaire dS de M.

Exprimer la longueur dS de ce déplacement élémentaire en fonction de :

1/ dx, dy, dz.   2/ ρ, dρ, dΘ, dz.   3/ r, Φ. dr, dΘ, dΦ.

Exercice 06

Dans une base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère deux vecteurs unitaires :

$\vec{OA} = \vec{u}_\rho$ $\vec{OB} = \vec{u}_\Theta$, perpendiculaires tournant dans le plan XOY de telle sorte que le trièdre $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\Theta, \vec{k})$ soit direct. On pose $(\vec{Ox}, \vec{OA}) = \Theta(t)$.

1-Calculer $d\vec{u}_\rho/dt$, $d\,\vec{u}_\rho/d\Theta$, $d\vec{u}_\Theta/dt$, $d\vec{u}_\Theta/d\Theta$, $d^2\vec{u}_\rho/d\Theta^2$, $d^2\vec{u}_\Theta/d\Theta^2$.

2-Montrer que $d\vec{u}_\rho/dt$ s'écrit $\vec{\omega}\wedge\vec{u}_\rho$ et $d\vec{u}_\Theta/dt = \vec{\omega}\wedge\vec{u}_\rho$

Exercice 7

Soit le repère absolu $R_1(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$ et le repère relatif $R(O_1, X, Y, Z_1)$ qui tourne autour de l'axe O_1Z_1 avec une vitesse angulaire constante ω.(D) est un axe fixe dans le repère R_1, parallèle a O_1y et qui passe par le point H où $\vec{O_1H} = a\vec{i}$. Un point M se déplace sur l'axe (D) selon la relation $\vec{HM} = b\sin\Omega t\vec{j}$, b et Ω sont des constantes.

1-Calculer la vitesse absolue et ses composantes du point M dans le repère relatif R

a- En utilisant la méthode directe
b- En utilisant la méthode de composition des vitesses.

2-Calculer l'accélération absolue et ses composants dans le repère relatif R.

a- En utilisant la méthode directe.
b- En utilisant la méthode de composition des accélérations.

Exercice 8

Soit le repère R(O,X,Y,Z) qui tourne autour de l' axe O_1Z_1 du repère immobile

$R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ avec une vitesse angulaire constante ω, de telle sorte que les axes des deux repère R et R_1 restent parallèle : $OX // O_1X_1$, $OY // O_1Y_1$, $OZ // O_1Z_1$.

$|\overrightarrow{O_1O}|$= r. Un point matériel M se déplace sur l'axe OY selon la relation :

$Y = \frac{1}{2}\gamma t^2$ ou $\gamma = c^{te}$. Calculer :

1-Calculer la vitesse absolue du point matériel M.

2-Calculer l'accélération absolue du point matériel M.

Exercice 9

Un piéton de taille h, muni d'un parapluie, marche à la vitesse cons-tante $\vec{u}$ sous une pluie qui tombe perpendiculairement au sol à la vitesse $\vec{V}$.

1. Déterminer la vitesse relative $\vec{V}_r$ de la pluie par rapport au piéton.

2. Quelle doit être l'inclinaison θ du parapluie par rapport au piéton pour qu'il ne reçoive aucune goutte de pluie ?

3. Déterminer le rayon adéquat R du parapluie.

4. Calculer R et θ pour $h = 1,8\,m, \quad u = 5\,km/h, \quad V = 10\,km/h$

Exercice 10

Un train se déplace à une vitesse $\vec{u}$ constante, parallèlement à l'axe $\overrightarrow{Ox}$ d'un référentiel galiléen $R(Oxyz)$ lié à la Terre. Soit $R'(O'x'y'z')$ un référentiel lié au train et tel que l'axe $\overrightarrow{Ox'}$ coïncide avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$ et que l'axe $\overrightarrow{Oy'}$ soit parallèle et de même sens que l'axe $\overrightarrow{Oy}$ confondu avec la verticale ascendante du lieu. A l'instant initial $t = 0$, les origines O et O' sont confondues et un voyageur, placé en O', laisse tomber une bille B en chute libre. Sachant que l'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{j}$, déterminer la trajectoire de B :

1. Dans le référentiel R.

2. Dans le référentiel R'.