الفصل الثالث: القوانين الاحتمالية

حالة المتغير العشوائي (م.ع) المنفصل

قانون برنولي Loi de Bernoulli

عند إجراء تجربة ما (مرة واحدة فقط) و نحصل من خلالها على حادثين أوليين A و $\bar{A}$ (متنافيين) و بفرض X م.ع الذي يمثل هذين الحادثين بحيث:

$$P(X = A) = p \quad P(X = \bar{A}) = 1 - p = q$$

نقول في مثل هذه الحالات أن X يتبع قانون **برنولي** ونكتب:

$$X \backsim B(p)$$

مثال

في تجربة رمي قطعة نقود مرة واحدة نحصل على $\Omega = \{P, F\}$

فتكون لدينا:

$$P(X = P) = \frac{1}{2} \quad P(X = F) = \frac{1}{2}$$

في هذه الحالة نقول أن X الممثل لظهور P أو F يتبع قانون برنولي لأن التجربة هي تجربة بسيطة وأسفرت عن حادثين أوليين فقط هما P وF (متنافيين)

خصائص

في هذه الحالة يكون:

$$E(X) = p \quad V(X) = pq$$

قانون ثنائي الحد Loi Binomiale

عند إجراء n تجربة متماثلة ومستقلة، وكل تجربة ستسفر على حادثين أوليين A و $\bar{A}$. و إذا افترضنا أن X م.ع ممثل لعدد مرات ظهور A، نقول في هذه الحالة أن X يتبع قانون ثنائي الحد ونكتب:

$$X \backsim B(n, p)$$

ويكون عندئذ:

$$P(X = r) = C_n^r p^r q^{n-r} \ ; 0 \leq r \leq n$$

r : هو عدد النجاحات

ملاحظة

من خلال ما تقدم يمكن ملاحظة أن قانون ثنائي الحد هو تكرار للتجربة البرنولية n مرة

مثال

ما هو احتمال الحصول 4 مرات على P من جراء رمي قطعة نقود 5 مرات

X : م.ع يمثل عدد المرات التي نحصل فيها على P

يمكن ملاحظة أن التجربة هي تجربة بسيطة نتيجتها الحادثان الأوليان P وF وقمنا بتكرار هذه التجربة 5 مرات ومنه نقول أن

$$X \backsim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$$

وعليه نحصل على:

$$P(X = 4) = C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5}{32}$$

خصائص

في هذه الحالة يكون

$$E(X) = np \quad V(X) = npq$$

من معطيات المثال السابق يصبح لدينا

$$E(X) = 5\left(\frac{1}{2}\right) = 2.5$$

$$V(X) = 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1.25 \Rightarrow \sigma_X = 1.12$$

قانون بواسون Loi de Poisson

نقول عن م.ع X أنه يتبع قانون بواسون عندما تكون النجاحات مستقلة عن بعضها البعض ويبقى متوسط حدوثها ثابتا في وحدة الزمن، ونكتب عندئذ:

$$X \backsim P(\lambda) \ ; \ \lambda > 0$$

ويكون:

$$P(X = r) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \quad r = 0,1,2, \ldots$$

λ : متوسط عدد النجاحات في وحدة الزمن

مثال

تتلقى سكرتيرة ما عادة 5 مكالمات هاتفية في الساعة، ما هو احتمال أن تتلقى مكالمتين فقط في ساعة مختارة عشوائيا

لدينا λ=5 هو متوسط عدد المكالمات وهو ثابت خلال وحدة الزمن (الساعة) فيكون عندئذ:

$$P(X = 2) = \frac{5^2}{2!} e^{-5} = 0.08$$

خصائص

في هذه الحالة يكون:

$$E(X)=V(X)=\lambda$$

حالة خاصة

عندما يكون $n>50$ و $p<0.1$ يستخدم قانون بواسون كتقريب لقانون ثنائي الحد، ويكون عندئذ:

$$\lambda = np$$

مثال

في محل بيع الأدوات الكهرومنزلية وجدنا أن 2% من الأدوات تالفة وتحتاج إلى تغيير. فإن باع صاحب المحل 200 أداة خلال يوم واحد، ما احتمال أن تكون من بينهم:

أ- أداتان تالفتان

ب- 10 أدوات تالفة

X : م.ع يمثل عدد الأدوات التالفة المباعة خلال اليوم

من خلال المعطيات يمكن ملاحظة أن $X \sim B(200,0.02)$ وعليه:

$$P(X=2)=C_{200}^{2}(0.02)^{2}(0.98)^{198}=0.1457$$

$$P(X=10)=C_{200}^{10}(0.02)^{10}(0.98)^{190}=0.0049$$

ما يمكن ملاحظته أن هذه العمليات الحسابية معقدة نوعا ما، ولتفادي هذا الإشكال سوف نسهل الحساب بالاعتماد على قانون بواسون ما دام:

$$n=200 \quad p=0.02 \Rightarrow \lambda=np=4$$

ويصبح لدينا:

$$P(X=2)=\frac{4^{2}}{2!}e^{-4}=0.1465$$

$$P(X=10)=\frac{4^{10}}{10!}e^{-4}=0.0053$$

حالة المتغير العشوائي (م.ع) المتصل

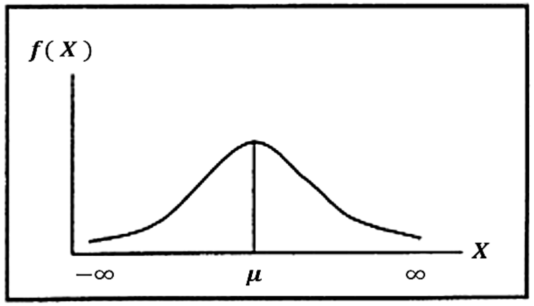
القانون الطبيعي (قانون لابلاس- غوس) Loi Normale

يعد هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، في المجالات التطبيقية و التجريبية، و منها الاستدلال الإحصائي و موضوع التقدير، و اختبارات الفرضيات، و فيما يلي عرض لهذا التوزيع.

إذا كان المتغير X متغير عشوائي له توزيع طبيعي، مجاله هو $-\infty < X < \infty$ فإن دالة الكثافة لاحتمالية له هي:

$$f(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^{2}} \; ; -\infty < X < \infty$$

و هذا التوزيع له منحنى متماثل (شكل ناقوس) على جانبي الوسط الحسابي μ حيث يأخذ الشكل التالي:



الجدير بالذكر أن هذا التوزيع له معلمتين هما الوسط الحسابي و الانحراف المعياري σ، و من ثم يعبر عن هذا المتغير بالعبارة:

$$X \sim N(\mu,\sigma)$$

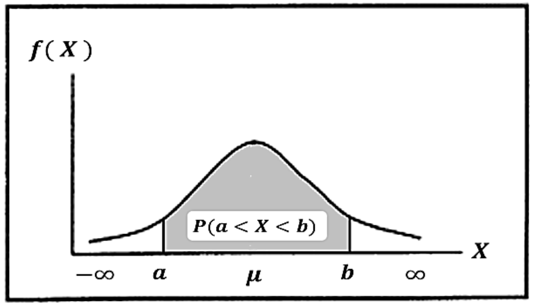
خصائص

يكون في هذه الحالة:

$$E(X)=\mu \qquad V(X)=\sigma^{2}$$

ملاحظة هامة

إذا أردنا حساب الاحتمال في التوزيع الطبيعي من النوع $P(a<X<b)$، فإن هذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



و بما أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل الاتي:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(X)dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

و هذا التكامل يصعب حسابه، و من ثم لجأ علماء الإحصاء إلى عمل تحويلة رياضية، يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، و هذه التحويلة هي:

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

و يعرف المتغير الجديد z بالمتغير الطبيعي القياسي (المعياري) الذي تأخذ دالة كثافة احتماله الصورة التالية:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \quad ; -\infty < z < \infty$$

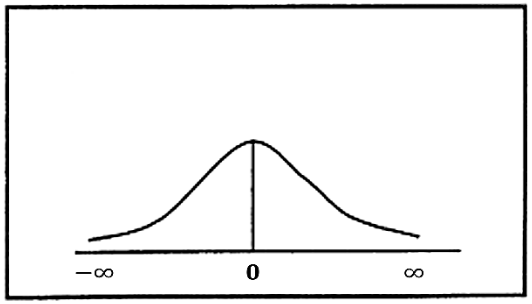
في هذه الحالة، تتحول خصائص التوزيع الطبيعي الجديد و الذي سيطلق عليه اسم التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري) *La loi Normale Centrée Réduite* لتصبح:

$$E(z) = 0 \qquad V(z) = 1$$

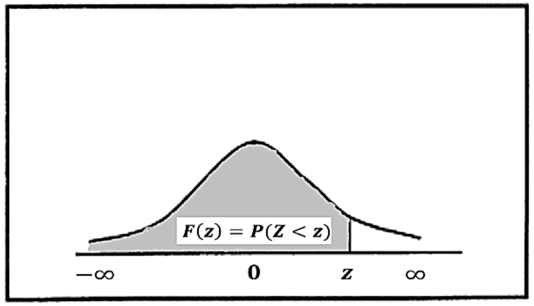
و من ثم يعبر عن توزيع المتغير Z بالرمز:

$$z \backsim N(0,1)$$

و يصبح في هذه الحالة شكل التوزيع كالآتي:



و لقد صمم الاحصائيون جداول إحصائية لحساب قيم تابع التوزيع $F(z) = P(Z < z)$ كما هو مبين في الشكل:



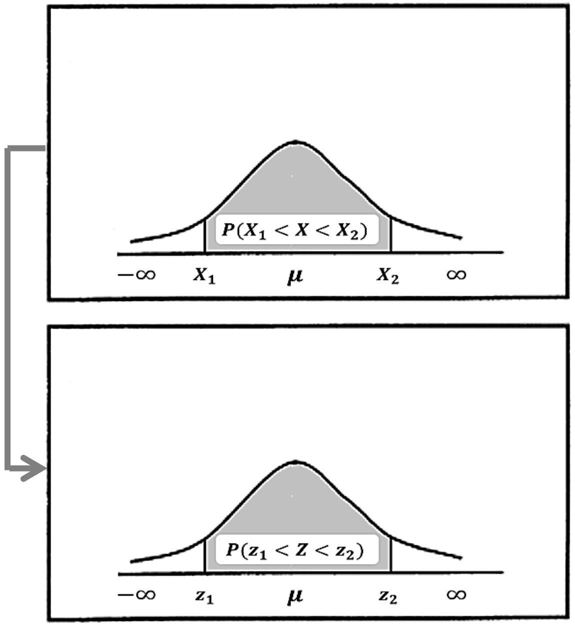
خطوات حساب الاحتمال $P(X_1 < X < X_2)$ باستخدام التحويلة الجديدة

1- يتم تحويل القيم الطبيعية X_1 و X_2 إلى قيم طبيعية قياسية

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\sigma} \quad , \qquad z_2 = \frac{X_2-\mu}{\sigma}$$

و من ثم يكون الاحتمال:

$$\boldsymbol{P(X_1 < X < X_2) = P(z_1 < Z < z_2)}$$



2- تستخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري)، و الذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال المراد حسابه $(z) = P(Z < z)$

طريقة استخدام (قراءة) جدول التوزيع الطبيعي المعياري في حساب الاحتمالات

أ- إذا كانت z **موجبة** فقيمتها تقرأ مباشرة من الجدول

ب- إذا كانت z **سالبة** فإن:

$$P(z \le -a) = 1 - P(z \le a) = 1 - F(a)$$

مثال

$$P(z < -1.95) = 1 - P(z < 1.95) = 1 - 0.9744 = 0.0256$$

ج- إذا كانت $z \ge a$ فإن:

$$P(z \ge a) = 1 - P(z \le a)$$

مثال

$$P(z \ge 0.57) = 1 - P(z \le 0.57) = 1 - 0.7157 = 0.2843$$

د-إذا كانت $a \le z \le b$ فإن:

$$P(a \le z \le b) = F(b) - F(a)$$

مثال

$$P(-0.12 \le z \le 2.1) = F(2.1) - F(-0.12) = F(2.1) - \big(1 - F(0.12)\big)$$
$$= 0.9821 - (1 - 0.5478) = 0.5299$$

هـ- إذا كانت $z \ge 3$ فإن:

$$F(z) \approx 1$$

هـ- إذا كانت $z \le -3$ فإن:

$$F(z) \approx 0$$

مثال

ينتج معمل ما بطاريات صغيرة الحجم متوسط أعمارها 30 ساعة بانحراف معياري قدره 5 ساعات، حيث أن أعمار هذه البطاريات تتوزع وفق التوزيع الطبيعي. ما احتمال أن تعيش بطارية ما أقل من 23 ساعة

يجب أولا حساب قيمة z المقابلة لـ x=23 فنجد:

$$z = \frac{23 - 30}{5} = -1.4$$

وعليه يصبح:

$$P(x < 23) = P(z < -1.4) = 1 - F(1.4) = 1 - 0.9192 = 0.0808$$

أو

$$P(x < 23) = P(z < -1.4) = F(-1.4) = 0.0808$$

حالة خاصة: العلاقة بين التوزيع ثنائي الحد و التوزيع الطبيعي

إذا كانت n كبيرة و كلا من p و q ليسا قريبين من الصفر، فإنه يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب جيد للتوزيع ثنائي الحد، و عندها تصبح:

$$z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

و يصبح التقريب أكثر جودة كلما زادت قيمة n. و من الناحية العملية، فإن التقريب يعد جيدا إذا كان كل من np و nq أكبر من 5

مثال

إذا علمت أن احتمال شفاء مريض مصاب بمرض معين هو 0.6 و أن في المستشفى هناك 100 شخص مصاب بهذا المرض، فما احتمال شفاء أقل من النصف

$$P(X < 50) = ?$$

بما أن $n = 100$ فنستخدم التقريب الطبيعي

$$\mu = np = 60 \qquad \sigma = \sqrt{npq} = 4.9$$

$$z = \frac{50 - 60}{4.9} = -2.04$$

$$P(x < 50) = P(z < -2.04) = 1 - P(z < 2.04) = 1 - F(2.04)$$
$$= 1 - 0.9793 = 0.0207 = 2.07\%$$

تنبيه: يمكن مشاهدة الشرح التفصيلي للمحاضرات و حلول سلاسل التمارين من خلال متابعة قناة الأستاذ المكلف بالمادة، و ذلك من خلال الرابط التالي:

www.youtube.com/c/drsaadouadel

لتسهيل عملية البحث يرجى النقر على **PLAYLISTS** أي **قوائم التشغيل** ثم اختيار **محاضرات الإحصاء 2 (الاحتمالات)** لعرض كل الفيديوهات حسب تسلسلها الزمني

لا تنسوا الاشتراك في القناة ليصلكم كل جديد