جامعة 8 ماي 1945 قالمة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم التجارية

السنة الأولى جذع مشترك **الموسم الجامعي 2019 – 2020**

سلسلة التمارين الرابعة للإحصاء 2

1- ليكن X متغير عشوائي يمثل مجموع الوجهين الظاهرين لحجري نرد. نرمز بـ A لنتائج النرد الأول وB لنتائج النرد الثاني

أ. حدد القوانين الاحتمالية وتوابع التوزيع لكل من: $Z = A - B, Y = |A - B|, X$

ب. أحسب: $P(-4 < Z \leq 0), P(2 < Y \leq 5), P(1 < X < 6)$

ج. أحسب: $F_Z(0) - F_Z(-4), F_Y(5) - F_Y(2), F_X(6) - F_X(1)$

2- نسحب 3 كريات بدون إرجاع من كيس به 5 كريات بيضاء و3 حمراء. نرمز بـ X لعدد الكريات البيضاء المسحوبة وبـ Y لعدد الكريات الحمراء المسحوبة

أ. حدد قانون التوزيع الاحتمالي لكل من X وY

ب. حدد قيم كل من: $F(Y)$ و $F(X)$

ج. أحسب: $\sigma_X, F(Y = 3), P(1 < X \leq 3), P(X \leq 3)$

3- لتكن دالة الكثافة الاحتمالية المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-3x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

أحسب: $P(X \leq -1), P(X > 1), P(1 < X \leq 3); P(X < 2), F(X), c$

4- لتكن X و Y متغيرتان عشوائيتان مستقلتان حيث: $E(X) = \frac{8}{3}$ و $E(Y) = \frac{30}{8}$. و لتكن $Z = X \times Y$ و $W = 3X + 2Y$، أحسب:

أ. $E(Z)$ **ب.** $E(W), E(Y - 3), E(X + 5)$ **ج.** $E(Y - E(Y))$

د. $V(W), V(X - 10), V(X + 5)$ إذا علمت أن: $V(X) = V(Y) = 5$

5- تنوي شركة ما مراجعة مدة الضمان الممنوح لمنتجاتها (3سنوات)، وذلك من خلال دراسة عدد عمليات الإصلاح المسجلة في مراكزها لخدمات ما لعد البيع. بينت هذه الدراسة أن المدة بين عملية البيع وتاريخ إرجاع المنتج للإصلاح تتبع الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 4x(9 - x^2)/81 & x \in [0,3] \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أ. أحسب متوسط المدة بين عمليتي البيع و الإرجاع للإصلاح

ب. أحسب تباين هذه المدة و الانحراف المعياري

6- لتكن دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية X المعرفة كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

أحسب: $P(-3 < X \leq 4), P(X > 2), f(x)$

7- باعت إحدى وكالات السيارات في يوم ما 5 سيارات من نفس النموذج، إذا علمت أن هذا النموذج يبقى صالحا بعد انقضاء سنتين من بدء الاستعمال (قيمة الضمان) باحتمال قدره 80%. أحسب احتمال أن تكون بعد سنتين من الاستعمال:

أ. 05 سيارات صالحة **ب .** سيارتان صالحتان **ج.** 03 سيارات صالحة على الأقل **د.** 03 سيارات غير صالحة على الأكثر

هـ احسب قيمة التوقع الرياضي والانحراف المعياري

8- طرحت فكرة اندماج شركة A مع شركة B، وخلال انعقاد الاجتماع قام أحد المختصين بصبر أراء لممثلي الشركة A فوجد أن نسبة من وافقوا على الفكرة تقدر بـ 60%

أ. سحبنا عينة من 5 أشخاص، فما هو احتمال وجود 03 منهم يوافقون على الفكرة

ب. سحبنا عينة من 4 أشخاص، ما احتمال وجود واحد منهم على الأقل يوافق على الفكرة

ج. سحبنا عينة من 50 شخص، ما القيمة المتوقعة و التباين لعدد الموافقين على الفكرة

9- لوحظ أن 3% من إنتاج مؤسسة ما تالف. سحبنا عشوائيا 100 وحدة من إنتاج هذه المؤسسة. ما احتمال أن تكون: **أ.** كل الوحدات صالحة **ب.** وحدة واحدة تالفة **ج.** على الأقل 3 وحدات تالفة **د.** أحسب قيمة التوقع الرياضي و الانحراف المعياري

10- في سلسلة تجارب داخل أحد المخابر العلمية لمعرفة مدى فعالية دواء معين تم حقن 160 فأر ابيض على الساعة العاشرة صباحا باحتمال نجاح ضئيل قدره للوهلة الأولى 25 ‰، تم معاينة الفئران على الساعة الثانية زوالا، ما احتمال نجاح التجربة على:

أ. 6.25% من العدد الإجمالي للفئران **ب.** أقل من 2.5% من العدد الإجمالي للفئران

في مرحلة ثانية من التجربة، تم حقن 2/5 من العدد السابق للفئران بمضاد حيوي منشط للجهاز المناعي مع احتمال 50 ‰ من نجاح التجربة في هذه الحالة. ما احتمال:

أ. شفاء 1/8 الفئران المحقونة بالمضاد **ب.** عدم شفاء أكثر من 93.75 %من الفئران المحقونة بالمضاد.

11- إذا كانت أوزان 300 طالب تتوزع طبيعيا بمتوسط 68 كغ و انحراف معياري قدره 3 كغ

أ. كم عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن 72 كغ

ب. كم عدد الطلبة الذين تقل أوزانهم عن أو تساوي 64 كغ

ج. كم عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن أو تساوي 65 كغ و تقل عن أو تساوي 71 كغ

د. كم عدد الطلبة الذين تساوي أوزانهم 68 كغ

ملاحظة: الأوزان المسجلة مقربة إلى أقرب كيلوغرام

12- طرح 80 سؤال في مسابقة مع كل منها أربعة أجوبة ممكنة أحدها فقط صحيح. أجاب أحد المتسابقين على جميع الأسئلة بالتخمين المحض، ما احتمال أن يكون قد أجاب صح على 25 إلى 30 سؤال

الحل النموذجي للسلسلة الرابعة

حل التمرين الأول

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
$P(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**
$F(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$	-

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{36} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{36} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{6}{36} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{10}{36} & 5 \leq x < 6 \\ \frac{15}{36} & 6 \leq x < 7 \\ \frac{21}{36} & 7 \leq x < 8 \\ \frac{26}{36} & 8 \leq x < 9 \\ \frac{30}{36} & 9 \leq x < 10 \\ \frac{33}{36} & 10 \leq x < 11 \\ \frac{35}{36} & 11 \leq x < 12 \\ \frac{36}{36} = 1 & x \geq 12 \end{cases}$$

Y	0	1	2	3	4	5	$\sum$
$P(Y)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	**1**
$F(Y)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{34}{36}$	$\frac{36}{36}$	-

$$F(Y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{6}{36} & 0\le y<1\\ \frac{16}{36} & 1\le y<2\\ \frac{24}{36} & 2\le y<3\\ \frac{30}{36} & 3\le y<4\\ \frac{34}{36} & 4\le y<5\\ \frac{36}{36}=1 & y\ge 5\end{cases}$$

Z	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\sum$
$P(Z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$F(Z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$	-

$$F(Z)=\begin{cases}0 & z<-5\\ \frac{1}{36} & -5\le z<-4\\ \frac{3}{36} & -4\le z<-3\\ \frac{6}{36} & -3\le z<-2\\ \frac{10}{36} & -2\le z<-1\\ \frac{15}{36} & -1\le z<0\\ \frac{21}{36} & 0\le z<1\\ \frac{26}{36} & 1\le z<2\\ \frac{30}{36} & 2\le z<3\\ \frac{33}{36} & 3\le z<4\\ \frac{35}{36} & 4\le z<5\\ \frac{36}{36}=1 & z\ge 5\end{cases}$$

$$P(1<X<6)=P(X=2)+\cdots+P(X=5)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{10}{36}$$

$$P(2<Y\le 5)=P(Y=3)+P(Y=4)+P(Y=5)=\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

$$P(-4<Z\le 0)=P(Z=-3)+\cdots+P(Z=0)=\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

خصائص

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$
$$P(X > b) = 1 - P(X \le b) = 1 - F(b)$$
$$F_X(6) - F_X(1) = \frac{15}{36} - 0 = \frac{15}{36}$$
$$F_Y(5) - F_Y(2) = \frac{36}{36} - \frac{24}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$
$$F_Z(0) - F_Z(-4) = \frac{21}{36} - \frac{3}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

حل التمرين الثاني

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	$\frac{C_5^0 C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$	$\frac{C_5^1 C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$	$\frac{C_5^2 C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56}$	$\frac{C_5^3 C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56}$	1
$F(X)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{16}{56}$	$\frac{46}{56}$	$\frac{56}{56}$	–

Y	0	1	2	3	Σ
$P(Y)$	$\frac{C_5^3 C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56}$	$\frac{C_5^2 C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56}$	$\frac{C_5^1 C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$	$\frac{C_5^0 C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$	1
$F(Y)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{40}{56}$	$\frac{55}{56}$	$\frac{56}{56}$	–

$$P(X \le 3) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 3) = 1$$
$$P(1 < X \le 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{40}{56}$$
$$F_Y(3) = 1$$
$$\sigma_X = \sqrt{E(X^2) - \big(E(X)\big)^2} = \sqrt{4.018 - (1{,}875)^2} = 0{,}709$$

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$	1
$E(X)$	0	$\frac{15}{56}$	$\frac{60}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{105}{56} = 1.875$
$E(X^2)$	0	$\frac{15}{56}$	$\frac{120}{56}$	$\frac{90}{56}$	$\frac{225}{56} = 4.018$

حل التمرين الثالث

تحديد قيمة العدد الثابت c

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow 0 + \int_{0}^{+\infty} (ce^{-3x})dx = 1 \Rightarrow c\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^x = 1$$
$$\Rightarrow c\left(\frac{e^{-3x}}{-3} - \frac{1}{-3}\right) = 1 \Rightarrow c\left(0 - \frac{1}{-3}\right) = 1 \Rightarrow c\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow c = 3$$

تحديد قيمة $F(X)$

الحالة الأولى: عندما تكون $x \leq 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dx = 0$$

الحالة الثانية: عندما تكون $x > 0$

$$f(x) = 3e^{-3x} \Rightarrow F(x) = \int_{0}^{+\infty} (3e^{-3x})dx = 3\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^x = 3\left(\frac{e^{-3x}}{-3} - \frac{1}{-3}\right) = 1 - e^{-3x}$$

و منه:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-3x} & x > 0 \end{cases}$$

تحديد قيمة $P(X < 2)$

$$P(X < 2) = P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-3(2)} = 0.9975$$

تحديد قيمة $P(1 < X \leq 3)$

$$P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = \left(1 - e^{-3(3)}\right) - \left(1 - e^{-3(1)}\right) = e^{-3} - e^{-9} = 0.0497$$

تحديد قيمة $P(X > 1)$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(1 - e^{-3(1)}\right) = e^{-3} = 0.0498$$

تحديد قيمة $P(X \leq -1)$

$$P(X \leq -1) = F(-1) = 0$$

حل التمرين الرابع

حساب قيمة $E(Z)$

إذا كانت المتغيرتان مستقلتان $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$

$$E(Z) = E(X \times Y) = E(X) \times E(Y) = \frac{8}{3} \times \frac{30}{8} = 10$$

حساب قيمة $E(W)$

$$E(W) = E(3X + 2Y) = E(3X) + E(2Y) = 3E(X) + 2E(Y) = 3\left(\frac{8}{3}\right) + 2\left(\frac{30}{8}\right) = 8 + 7.5 = 15.5$$

حساب قيمة $E(X + 5)$

$$E(X + 5) = E(X) + 5 = \frac{8}{3} + \frac{15}{3} = \frac{23}{3} = 7.67$$

حساب قيمة $E(Y - 3)$

$$E(Y - 3) = E(Y) - 3 = \frac{30}{8} - \frac{24}{8} = \frac{6}{8} = 0.75$$

حساب قيمة $E\big(Y - E(Y)\big)$

$$E\big(Y - E(Y)\big) = E(Y) - E\big(E(Y)\big) = E(Y) - E(Y) = 0$$

حساب قيمة $V(W)$

$$V(W) = V(3X + 2Y) = V(3X) + V(2Y) = 3^2V(X) + 2^2V(X) = 9(5) + 4(5) = 65$$

حساب قيمة $(X - 10)$

$$V(X - 10) = V(X) - V(10) = V(X) = 5$$

حساب قيمة $(X + 5)$

$$V(X + 5) = V(X) + V(5) = V(X) = 5$$

حل التمرين الخامس

حساب متوسط المدة بين عمليتي البيع و الإرجاع للإصلاح

$$f(x)=\begin{cases}4x(9-x^2)/81 & x\in[0,3]\\ 0 & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x(0)dx+\frac{4}{81}\int_{0}^{3}x^2(9-x^2)dx+\int_{3}^{+\infty}x(0)dx=\frac{4}{81}\int_{0}^{3}(9x^2-x^4)dx$$

$$=\frac{4}{81}\left[\frac{9x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^3=\frac{4}{81}\left[\left(\frac{9(27)}{3}\right)-\left(\frac{243}{5}\right)-0\right]=1.6$$

حساب تباين هذه المدة و الانحراف المعياري

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{4}{81}\int_{0}^{3}x^3(9-x^2)dx=\frac{4}{81}\int_{0}^{3}(9x^3-x^5)dx=\frac{4}{81}\left[\frac{9x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_0^3$$

$$=\frac{4}{81}\left[\left(\frac{9(81)}{4}\right)-\left(\frac{729}{6}\right)-0\right]=3$$

$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=3-(1.6)^2=0.44\Rightarrow\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.44}=0.66$$

حل التمرين السادس

لدينا:

$$f(x)=F'(x)$$

الحالة الأولى: عندما تكون $x<0$

$$F(x)=0\Rightarrow f(x)=0$$

الحالة الثانية: عندما تكون $x\geq 0$

$$F(x)=1-e^{-2x}\Rightarrow f(x)=2e^{-2x}$$

و منه:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2e^{-2x} & x\geq 0\end{cases}$$

تحديد قيمة $P(X>2)$

$$P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-F(2)=1-\left(1-e^{-2(2)}\right)=e^{-4}=0.0183$$

تحديد قيمة $P(-3<X\leq 4)$

$$P(-3<X\leq 4)=F(4)-F(-3)=\left(1-e^{-2(4)}\right)-0=0.9997$$

حل التمرين السابع

حساب احتمال وجود 05 سيارات صالحة

$$P(X=5)=C_5^5(0.8)^5(0.2)^0=0.3277$$

حساب احتمال وجود سيارتان صالحتان

$$P(X=2)=C_5^2(0.8)^2(0.2)^3=0.0512$$

حساب احتمال وجود 03 سيارات صالحة على الأقل

$$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-[P(X=0)+\cdots+P(X=2)]=0.9421$$

حساب احتمال وجود 03 سيارات على الأكثر غير صالحة

P(3 سيارات على الأكثر غير صالحة) $=P$(سيارتان على الأقل صالحة)

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]=0.9933$$

حساب التوقع الرياضي و الانحراف المعياري

$$E(X)=np=5\times 0.8=4$$

$$V(X)=npq=5\times 0.8\times 0.2=0.8\Rightarrow\sigma_X=\sqrt{0.8}=0.89$$

حل التمرين الثامن

احتمال وجود 03 أشخاص يوافقون على فكرة الاندماج

$$P(X=3)=C_5^3(0.6)^3(0.4)^2=0.3456$$

احتمال وجود شخص على الأقل يوافق على فكرة الاندماج

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-(0.4)^4=0.9744$$

القيمة المتوقعة و التباين

$$E(X)=np=50\times 0.6=30$$

$$V(X)=npq=50\times 0.6\times 0.4=12$$

حل التمرين التاسع

احتمال إيجاد كل الوحدات صالحة (هذا يعني احتمال عدم إيجاد أي وحدة تالفة)

$$P(X=0)=C_{100}^{0}(0.03)^{0}(0.97)^{100}=0.0476$$

يمكن ملاحظة من معطيات التمرين أن:

$$n=100\geq 30 \qquad p=0.03\leq 0.1 \qquad np=3\leq 10$$

إذا، يمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب للتوزيع ثنائي الحد. و عليه، يصبح

$$\lambda=np=100\times 0.03=3$$

$$P(X=0)=\frac{3^0}{0!}e^{-3}=0.0498$$

احتمال إيجاد وحدة واحدة تالفة

$$P(X=1)=\frac{3^1}{1!}e^{-3}=0.1494$$

$$P(X=1)=C_{100}^{1}(0.03)^{1}(0.97)^{99}=0.1471$$

احتمال إيجاد على الأقل 3 وحدات تالفة

$$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-\left[\frac{3^0}{0!}e^{-3}+\frac{3^1}{1!}e^{-3}+\frac{3^2}{2!}e^{-3}\right]=0.577$$

التوقع الرياضي و الانحراف المعياري

$$E(X)=np=100\times 0.03=3$$

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{npq}=\sqrt{100\times 0.03\times 0.97}=\sqrt{2.91}=1.71$$

حل التمرين العاشر

المرحلة الأولى: حقن 160 فأر أبيض

احتمال نجاح التجربة على 6.25% من العدد الإجمالي للفئران

$$n=160\Rightarrow 6.25\%=10=r$$

$$p=\frac{25}{1000}=0.025$$

$$P(X=10)=C_{160}^{10}(0.025)^{10}(0.975)^{150}=0.0049$$

يمكن ملاحظة من معطيات التمرين أن:

$$n=160\geq 30 \qquad p=0.025\leq 0.1 \qquad np=4\leq 10$$

إذا، يمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب للتوزيع ثنائي الحد. و عليه، يصبح:

$$\lambda=np=160\times 0.025=4$$

$$P(X=10)=\frac{4^{10}}{10!}e^{-4}=0.0053$$

احتمال نجاح التجربة على أقل من 2.5% من العدد الإجمالي للفئران

$$n = 160 \Rightarrow 2.5\% = 4 = r$$

$$P(X < 4) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 3) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} + \cdots + \frac{4^3}{3!}e^{-4} = 0.4335$$

$$P(X < 4) = C_{160}^{0}(0.025)^0(0.975)^{160} + \cdots + C_{160}^{3}(0.025)^3(0.975)^{157} = 0.4310$$

المرحلة الثانية: حقن 64 فأر أبيض بمضاد حيوي

احتمال شفاء $\frac{1}{8}$ الفئران المحقونة بالمضاد الحيوي

$$n = 160 \times \frac{2}{5} = 64$$

$$r = \frac{64}{8} = 8$$

$$p = \frac{50}{1000} = 0.05$$

$$P(X = 8) = C_{64}^{8}(0.05)^8(0.95)^{56} = 0.0098$$

و بما أن:

$$n = 64 \geq 30 \qquad p = 0.05 \leq 0.1 \qquad np = 3.2 \leq 10$$

فيمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب للتوزيع ثنائي الحد. و عليه، يصبح:

$$\lambda = np = 64 \times 0.05 = 3.2$$

$$P(X = 8) = \frac{3.2^8}{8!}e^{-3.2} = 0.0111$$

احتمال عدم شفاء أكثر من 93.75% من الفئران المحقونة

$$r = 64 \times 0.9375 = 60$$

P(عدم شفاء أكثر من 60 فأر) = P(شفاء 3 فئران أو أقل)

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 3) = \frac{3.2^0}{0!}e^{-3.2} + \cdots + \frac{3.2^3}{3!}e^{-3.2} = 0.6025$$

حل التمرين الحادي عشر

عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن 72 كغ

كل طالب وزنه من 72.5 كغ إلى 73 كغ يقرب وزنه إلى 73 كغ، و في هذه الحالة يكون:

$$X \geq 72.5$$

بغرض تسهيل العمليات الحسابية، نقوم بتحويل المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الطبيعي

$$X \rightsquigarrow N(68\,,3)$$

إلى متغير عشوائي جديد z الذي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي، بحيث:

$$z \rightsquigarrow N(0\,,1)$$

فيصبح عندئذ:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{72.5 - 68}{3} = 1.5$$

و منه:

$$P(X \geq 72.5) = P(z \geq 1.5) = 1 - P(z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

و عليه، عدد الطلبة المطلوب حسابه هو:

$$0.0668(300) = 20.04 \cong 20 \text{ (طالب)}$$

عدد الطلبة الذين تقل أوزانهم عن أو تساوي 64 كغ

كل طالب وزنه من 64.4 كغ إلى 64 كغ يقرب وزنه إلى 64 كغ، و في هذه الحالة يكون:

$$X < 64.5$$

$$P(X \leq 64) = P(X < 64.5)$$

$$z = \frac{64.5 - 68}{3} = -1.17$$

$$P(X < 64.5) = P(z < -1.17) = F(-1.17) = 0.121$$

و عليه، عدد الطلبة المطلوب حسابه هو:

$$0.121(300) = 36.3 \cong 36 \text{ (طالب)}$$

عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن أو تساوي 65 كغ و تقل عن أو تساوي 71 كغ

$$P(65 \leq X \leq 71) = P(64.5 < X < 71.5)$$

$$z_1 = \frac{64.5 - 68}{3} = -1.17 \qquad z_2 = \frac{71.5 - 68}{3} = 1.17$$

$$P(64.5 < X < 71.5) = P(-1.17 < z < 1.17) = F(1.17) - F(-1.17) = 0.879 - 0.121 = 0.758$$

و عليه، عدد الطلبة المطلوب حسابه هو:

$$0.758(300) = 227.4 \cong 227 \text{ (طالب)}$$

عدد الطلبة الذين تساوي أوزانهم 68 كغ

$$P(X = 68) = P(67.5 < X < 68.5)$$

$$z_1 = \frac{67.5 - 68}{3} = -0.17 \qquad z_2 = \frac{68.5 - 68}{3} = 0.17$$

$$P(67.5 < X < 68.5) = P(-0.17 < z < 0.17) = F(0.17) - F(-0.17) = 0.5675 - 0.4325 = 0.135$$

و عليه، عدد الطلبة المطلوب حسابه هو:

$$0.135(300) = 40.5 \cong 41 \text{ (طالب)}$$

حل التمرين الثاني عشر

احتمال أن يكون الطالب قد أجاب صح على 25 إلى 30 سؤال

$$P(25 \leq X \leq 30) = ?$$

يمكن ملاحظة أن:

$$n = 80$$

$$p = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$np = 80\frac{1}{4} = 20 > 5$$

و منه، يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لقانون ثنائي الحد. فيكون عندئذ:

$$\mu = np = 20$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 \times 0.25 \times 0.75} = 3.87$$

حيث:

$$z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

و عندها، يصبح:

$$P(25 \leq X \leq 30) = P(24.5 < X < 30.5)$$

$$z_1 = \frac{24.5 - 20}{3.87} = 1.16 \qquad z_2 = \frac{30.5 - 20}{3.87} = 2.71$$

$$P(24.5 < X < 30.5) = P(1.16 < z < 2.71) = F(2.71) - F(1.16) = 0.9966 - 0.877 = 0.1196$$