Université 08 Mai 45 Guelma, **2016/2019**
Département de Mathématiques, $1^{ère}$ année L.M.D-Maths-Info.
Matière: Algèbre 1 (Semestre 1)
Par l'enseignant: Dj. Bellaouar

1 CHAPITRE 4. Polynômes (Rappel de Cours)

Pour tout $X \in \mathbb{R}$, l'expression

$$f : X \mapsto a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n.$$

est un **polynôme**.

On écrit aussi

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i;\text{ où } n \in \mathbb{N} \text{ et } (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

- ▷ $n \in \mathbb{N}$ est appelé le **degré** du polynôme, et noté $d^\circ p$.
- ▷ $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ et a_0 sont $n+1$ réels appelés les **coefficients** du polynôme.
- ▷ a_0 est appelé le **terme constant**.

Notation. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$\mathbb{K}_n [X] = \left\{ p = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n;\ (a_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K} \right\}.$$

1.1 Division Euclidienne

Theorem 1 (Division Euclidienne) *Soient A et B deux polynômes, $\exists!$ deux polynômes (Q, R) ($\exists!$ signifie qu'il existe un et un seul) tels que:*

$$\begin{cases} A = B.Q + R \\ d^\circ R < d^\circ B \end{cases},\ \textit{où} \begin{cases} R = \text{ le reste} \\ Q = \text{ le quotient} \end{cases}$$

Theorem 2 (Unicité du couple (Q, R)) *Soient A et B deux polynômes tels que $A = BQ + R$, où $d^\circ R < d^\circ B$. Alors le couple (Q, R) est unique.*

Proof. Supposons qu'il existe un deuxième couple (Q', R') tels que

$$\begin{cases} A = B.Q + R \\ d^\circ R < d^\circ B \end{cases} \text{ et } \begin{cases} A = B.Q' + R' \\ d^\circ R' < d^\circ B \end{cases}$$

Ce qui donne!

$$B (Q - Q') = R' - R \text{ avec } d^\circ (R' - R) \le \max (d^\circ R, d^\circ R') < d^\circ B. \quad (1)$$

D'autre part,

$$d^\circ [B (Q - Q')] = d^\circ B + d^\circ (Q - Q') = d^\circ (R' - R)$$

Par suite

$$d^\circ B + d^\circ (Q - Q') < d^\circ B.$$

D'où $d^\circ (Q - Q') = 0$. D'après (1) on a $Q' = Q$, et par conséquent $R' = R$. ■

1.2 Division suivant les puissances croissantes

Soient A, B deux polynômes ordonnés suivant les puissances croissantes:

$$A = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n, \;\; B = b_0 + b_1 X + ... + b_n X^n.$$

Alors $\exists!$ deux polynômes (Q, R) tels que

$$A = BQ + X^{k+1} R, \text{ où } d^\circ Q \leq k; \;\; (k \text{ étant fixé à l'avance}).$$

C'est la division Euclidienne de A par B à l'ordre k.

- ▹ $Q =$ le quotient d'ordre k.
- ▹ $R =$ le reste d'ordre k.

1.3 Exemples

Exemple 1. Soient $A = 1 + X$ et $B = 1 + X^2$. La division de A par B à l'ordre 2 est donnée par:

$$\begin{array}{ll}
1+X & 1+X^2 \\
1+X^2 & 1+X-X^2 \\
X-X^2 & \\
X+X^3 & \\
-X-X^3 & \\
-X^2-X^4 & \\
X^3+X^4 &
\end{array}$$

D'où

$$\underbrace{1+X}_{A} = \underbrace{\left(1+X^2\right)}_{B}\underbrace{\left(1+X-X^2\right)}_{Q} + X^3\underbrace{(1+X)}_{R}.$$

Exemple 2. Pour $A = 1$ et $B = 1 - X$, on a la division de A par B à l'ordre 3 est donnée par:

$$1 = (1-X)\underset{Q}{\left(1 + X + X^2 + X^3\right)} + X^4 \times \underbrace{1}_{R}.$$

De même, la division de A par B à l'ordre n est donnée par:

$$1 = (1-X)\underset{Q}{\left(1 + X + X^2 + ... + X^n\right)} + X^{n+1} \times \underbrace{1}_{R}$$

Ce qui donne

$$\frac{1-X^{n+1}}{1-X} = 1 + X + X^2 + ... + X^n = \sum_{k=0}^{n} X^k.$$

Propriétés. Soient A, B et D trois polynômes dans $\mathbb{K}[X]$.

- $\triangleright$ A divise $B \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists\, Q \in \mathbb{K}[X] : B = QA \Leftrightarrow$ le reste de la division euclidienne de A par B est nul.
- $\triangleright$ $D = pgcd\,(A, B) \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} D \text{ divise } A \text{ et } D \text{ divise } B, \\ \forall\, D' \in \mathbb{K}[X] \ : \ (D' \text{ divise } A \text{ et } D' \text{ divise } B) \Rightarrow D' \text{ divise } D. \end{cases}$
- $\triangleright$ Si D est un *pgcd* de A et B, alors λD est aussi un *pgcd* de A et B ($\forall\, 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$).
- $\triangleright$ $D = pgcd\,(A, B) \overset{\text{Théorème de Bézout}}{\Leftrightarrow} D$ divise A et B et $\exists\, u, v \in \mathbb{K}[X] : Au + Bv = D$.

Exemple 3. On considère les deux polynômes

$$A = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \text{ et } B = X^4 + 2X^3 + X + 2.$$

1) On détermine un $D = pgcd$ de A et B.

$$\begin{array}{c|c} \overbrace{X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1}^{A} & \overbrace{X^4 + 2X^3 + X + 2}^{B} \\ -X^5 - 2X^4 - X^2 - 2X & \underbrace{X + 1}_{Q_1} \\ & \\ X^4 + X^3 + X + 1 & \\ -X^4 - 2X^3 - X - 2 & \\ \underbrace{-X^3 - 1}_{R_1} & \end{array}$$

i.e.,

$$\begin{cases} A = BQ_1 + R_1 & \textbf{(i)} \\ Q_1 = X + 1, & \\ R_1 = -X^3 - 1. & \end{cases}$$

et aussi, on a

$$\begin{array}{c|c} X^4 + 2X^3 + X + 2 & -X^3 - 1 \\ -X^4 - X & \underbrace{-X - 2}_{Q_2} \\ & \\ 2X^3 + 2 & \\ -2X^3 - 2 & \\ \underbrace{0}_{R_2} & \end{array}$$

i.e.,

$$\begin{cases} B = R_1Q_2 + R_2 & \textbf{(ii)} \\ Q_2 = -X - 2, & \\ R_2 = 0. & \end{cases}$$

Maintenant, comme $R_2 = 0$, alors $D = R_1$ (c'est le dernier reste non nul); i.e.,

$$D = -x^3 - 1.$$

C'est-à-dire que $pgcd\,(A, B) = -x^3 - 1$.

2) Puisqu'on a $pgcd\,(A, B) = D \neq$ constant, alors A et B ne sont pas premiers entre eux.

3) On détermine deux polynômes u et v dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $Au + Bv = D$.

D'après **(i)** on a $A = BQ_1 + R_1$; or $D = R_1$, donc $A = BQ_1 + D$; i.e.,

$$D = A - BQ_1 = A \times 1 + B \times (-Q_1)\,.$$

D'où $D = Au + Bv$; où $u = 1$ et $v = -Q_1 = -(X+1) = -X - 1$. C'est-à-dire que

$$D = -x^3 - 1 = A \times 1 + B \times (-X - 1)\,.$$

1.4 Quelques propriétés

Rappel. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

- ▷ α est une racine de $P \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} P(\alpha) = 0$.
- ▷ α est une racine de $P \Leftrightarrow X - \alpha$ divise $P \Leftrightarrow \exists\, Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X - \alpha)\,Q$.

Rappel. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

- ▷ α est une racine de P d'ordre de multiplicité $m \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists\, Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X - \alpha)^m\, Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

$$\begin{cases} \text{Si } m = 1, \text{ on dit que } \alpha \text{ est une racine simple de } P. \\ \text{Si } m = 2, \text{ on dit que } \alpha \text{ est une racine double de } P. \\ \text{Si } m = 3, \text{ on dit que } \alpha \text{ est une racine triple de } P. \\ \text{Si } m = 4, \text{ on dit que } \alpha \text{ est une racine quadriple de } P. \end{cases}$$

- ▷ α est une racine de P d'ordre de multiplicité $m \overset{\text{Théorème}}{\Leftrightarrow} P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Rappel. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- ▷ P est irréductible dans $\mathbb{K}[X] \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$

$$\begin{cases} P \text{ non constant} \\ P \text{ ne décompose pas sous la forme } AB \text{ avec } A, B \in \mathbb{K}[X] \text{ et } d^\circ A \geq 1 \text{ et } d^\circ B \geq 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} P \text{ non constant} \\ \text{Si } P = AB, \text{ où } A, B \in \mathbb{K}[X]\,, \text{ alors } A \text{ constant ou } B \text{ constant.} \end{cases}$$

- ▷ P est irréductible dans $\mathbb{R}[X] \overset{\text{Théorème}}{\Leftrightarrow} d^\circ P = 1$ ou $d^\circ P = 2$ avec $\Delta < 0$.

Théorème D'Alembert-Gauss (Théorème Fondamental d'Algèbre)

« *Tout polynôme dans* $C[X]$ *de degré* $n \geq 1$ *admet exactement* n *racines dans* $\mathbb{C}$». Notons que ces racines ne sont pas forcément distinctes.

Équations des racines.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ (où $d^\circ P = n \geq 1$) défini par

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0.$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ses racines dans $\mathbb{C}$ (donc $P(X) = a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) ... (X - \alpha_n)$). Alors,

‹‹La somme des produits k à k des racines $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est égal à $(-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$; pour tout $1 \leq k \leq n$››

On a par exemple

- ▷ Si $P(X) = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ $(a_2 \neq 0)$ et si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ sont les racines de P, alors

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{a_1}{a_2} \\ \alpha_1 \alpha_2 = \dfrac{a_0}{a_2}. \end{cases}$$

- ▷ Si $P(X) = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ $(a_3 \neq 0)$ et si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ sont les racines de P, alors

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}. \end{cases}$$

- ▷ Si $P(X) = a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ $(a_4 \neq 0)$ et si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ sont les racines de P, alors

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\dfrac{a_3}{a_4} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \dfrac{a_2}{a_4} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\dfrac{a_1}{a_4} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \dfrac{a_0}{a_4}. \end{cases}$$

Rappel. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P d'ordre de multiplicité m, alors $\overline{\alpha} \in \mathbb{C}$ est aussi une racine de P d'ordre de multiplicité m.

1.5 Problèmes avec solutions, voir la série N° 04)

Ex 01. Factoriser le polynôme $X^4 - 1$.

- $\triangleright$ dans $\mathbb{C}[X]$, $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$
- $\triangleright$ Dans $\mathbb{R}[X]$, $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$

Règles.

1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \;\; a^2 - b^2 = (a-b)\, a + b$
2. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \;\; a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

2 TD's série N° 04

<u>**Exercice 01**</u>**.** On considère les deux polynômes

$$A = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \text{ et } B = X^4 + 2X^3 + X + 2.$$

1) Déterminer un plus grand commun diviseur de A et B, i.e., $D = p.g.c.d\,(A, B)$.
2) A et B sont-ils premiers entre eux ?
3) Trouver deux polynômes u et v dans $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $Au + Bv = D$.

<u>**Exercice 02**</u>**.** Soient $A = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$ et $B = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

1) Déterminer un p.g.c.d D de A et B.
2) Trouver deux polynômes u et v de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant l'identité $Au + Bv = D$.
3) Montrer que -1 est une racine de A; puis déterminer l'ordre de sa multiplicité.
4) En déduire la factorisation de A et B en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

<u>**Exercice 03**</u>**.** On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ définie par

$$P(X) = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 20X^2 - 19X + 6.$$

1) Montrer que 2 est une racine de P.
2) Montrer que 1 est une racine triple de P.
3) Factoriser le polynôme P en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 04. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P(X) = X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X - 3.$$

Montrer que i est une racine double de P; factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Rappel. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P d'ordre de multiplicité m, alors $\overline{\alpha} \in \mathbb{C}$ est aussi une racine de P d'ordre de multiplicité m.

Exercice 05.

1) Déterminer les réels a, b pour que le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ soit divisible par $(x-1)^2$.

2) Factoriser alors P en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 06. (Sans déterminer les racines (!))

1) Factoriser $X^4 + 1$; puis $X^8 - 1$ en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2) Factoriser $X^6 + 1$; puis $X^{12} - 1$ en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- **Comprendre la question** $= \dfrac{1}{2-\varepsilon}$ **de la réponse, où** $\varepsilon \simeq 0$ **positif**[1]**.**

[1] **Remarque.** Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exemples en TD, l'enseignant choisira les exemples qu'il veut traiter, il appartient à l'étudiant le soin de faire le reste.

2.1 Solution

Exercice 01. On considère les deux polynômes

$$A = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \text{ et } B = X^4 + 2X^3 + X + 2.$$

1) On détermine un $D = p.g.c.d$ de A et B.

$$\begin{array}{c|c}
\overbrace{X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1}^{A} & \overbrace{X^4 + 2X^3 + X + 2}^{B} \\
-X^5 - 2X^4 - X^2 - 2X & \underbrace{X + 1}_{Q_1} \\
 & \\
X^4 + X^3 + X + 1 & \\
-X^4 - 2X^3 - X - 2 & \\
\underbrace{-X^3 - 1}_{R_1} &
\end{array}$$

i.e.,

$$\begin{cases} A = BQ_1 + R_1 & \textbf{(i)} \\ Q_1 = X + 1, \\ R_1 = -X^3 - 1. \end{cases}$$

et aussi, on a

$$\begin{array}{c|c}
X^4 + 2X^3 + X + 2 & -X^3 - 1 \\
-X^4 - X & \underbrace{-X - 2}_{Q_2} \\
 & \\
2X^3 + 2 & \\
-2X^3 - 2 & \\
\underbrace{0}_{R_2} &
\end{array}$$

i.e.,

$$\begin{cases} B = R_1Q_2 + R_2 & \textbf{(ii)} \\ Q_2 = -X - 2, \\ R_2 = 0. \end{cases}$$

Maintenant, comme $R_2 = 0$, alors $D = R_1$ (c'est le dernier reste non nul); i.e.,

$$D = -x^3 - 1.$$

C'est-à-dire que $p.g.c.d\,(A, B) = -x^3 - 1$.

2) Puisqu'on a $p.g.c.d\,(A, B) = D \neq$ constant, alors A et B ne sont pas premiers entre eux.

3) On détermine deux polynômes u et v dans $\mathbb{R}\,[X]$ tels que $Au + Bv = D$.

D'après **(i)** on a $A = BQ_1 + R_1$; or $D = R_1$, donc $A = BQ_1 + D$; i.e.,

$$D = A - BQ_1 = A \times 1 + B \times (-Q_1).$$

D'où $D = Au + Bv$; où $u = 1$ et $v = -Q_1 = -(X+1) = -X - 1$. C'est-à-dire que

$$D = -x^3 - 1 = A \times 1 + B \times (-X - 1).$$

<u>Exercice 02</u>.

Soient $A = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$ et $B = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

1) On détermine un $p.g.c.d = D$ de A et B.

$$\begin{array}{c|c}
\overbrace{X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2}^{A} & \overbrace{X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2}^{B} \\
-X^4 - X^3 + X^2 + 2X + 2 & \underbrace{1}_{Q_1} \\
\underbrace{X^3 - 2X}_{R_1} &
\end{array}$$

i.e.,

$$\begin{cases} A = BQ_1 + R_1 & \textbf{(i)} \\ Q_1 = 1, \\ R_1 = X^3 - 2X. \end{cases}$$

et

$$\begin{array}{c|c}
\overbrace{X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2}^{B} & \overbrace{X^3 - 2X}^{R_1} \\
-X^4 + 2X^2 & \underbrace{X + 1}_{Q_2} \\
X^3 + X^2 - 2X - 2 & \\
-X^3 + 2X & \\
\underbrace{X^2 - 2}_{R_2} &
\end{array}$$

i.e.,

$$\begin{cases} B = R_1Q_2 + R_2 & \textbf{(ii)} \\ Q_2 = X + 1, \\ R_2 = X^2 - 2. \end{cases}$$

De même, on a

$$\begin{array}{c|c}
\overbrace{X^3 - 2X}^{R_1} & \overbrace{X^2 - 2}^{R_2} \\
-X^3 + 2X & \underbrace{X}_{Q_3} \\
\underbrace{0}_{R_3} &
\end{array}$$

i.e.,

$$\begin{cases} R_1 = R_2 Q_3 + R_3 & \textbf{(iii)} \\ Q_3 = X, \\ R_3 = 0. \end{cases}$$

Maintenant, comme $R_3 = 0$, alors $D = R_2$ (c'est le dernier reste non nul); i.e.,

$$D = x^2 - 2.$$

C'est-à-dire que $p.g.c.d\,(A, B) = x^2 - 2$.

2) On cherche deux polynômes u et v de $\mathbb{R}[X]$ tels que $D = Au + Bv$.

On a d'après ce qui précède :

$$\begin{cases} A = BQ_1 + R_1 & \textbf{(i)} \\ B = R_1 Q_2 + R_2 & \textbf{(ii)} \end{cases} \text{, avec } D = R_2.$$

Par suite, on a

$$D = \underbrace{R_2 = B - R_1 Q_2}_{\text{d'après } \textbf{(ii)}} = \underbrace{B - (A - BQ_1)\,Q_2}_{\text{d'après } \textbf{(i)}} = B - AQ_2 BQ_1 Q_2 = A\,(-Q_2) + B\,(1 + Q_1 Q_2)\,.$$

D'où $D = Au + Bv$;

$$\begin{cases} u = -Q_2 = -\,(X+1) = -X - 1, \\ v = 1 + Q_1 Q_2 = 1 + 1 \times (X+1) = X + 2. \end{cases}$$

On a donc $X^2 - 2 = A \times (-X - 1) + B \times (X + 2)\,.$

3) Montrons que -1 est une racine de A :

On a $A = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$, donc

$$A\,(-1) = (-1)^4 + 2\,(-1)^3 - (-1)^2 - 4\,(-1) - 2 = 1 - 2 - 1 + 4 - 2 = 0.$$

On détermine l'ordre de multiplicité de la racine -1.
On a

$$\begin{aligned} A &= X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2;\;\; A\,(-1) = 0 \\ &\Rightarrow\;\; A' = 4X^3 + 6X^2 - 2X - 4;\;\; A'\,(-1) = 4\,(-1)^3 + 6\,(-1)^2 - 2\,(-1) - 4 = -4 + 6 + 2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow\;\; A'' = 12X^2 + 12X - 2;\;\; A''\,(-1) = 12\,(-1)^2 + 12\,(-1) - 2 = 12 - 12 - 2 = -2 \neq 0. \end{aligned}$$

D'où l'ordre de multiplicité de la racine -1 est $m = 2$; i.e., -1 est une racine double de A.

4) La factorisation de A et B en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

D'abord, on a $A = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$.

De 1), on a $D = X^2 - 2$; Or D divise A, il existe donc $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = (X^2 - 2) Q_1$.

De 3), on a -1 est une racine double de A, il existe donc $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = (X+1)^2 Q_2$ et $Q_2(-1) \neq 0$.

Finalement, comme $d^\circ A = 4$, alors

$$A = \left(X^2 - 2\right)(X+1)^2 = \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)(X+1)^2.$$

- La factorisation de B en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

D'abord, on a $B = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$.

De 1), on a $D = X^2 - 2$; Or D divise B, il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = (X^2 - 2) Q$.

Puisque $d^\circ Q = 2$ (car $d^\circ B = 4$). On peut trouver le polynôme Q en effectuant la division euclidienne de B par $X^2 - 2$. En effet,

$$\begin{array}{c|c}
\overbrace{X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2.}^{B} & X^2 - 2 \\
-X^4 + 2X^2 & \underbrace{X^2 + X + 1}_{Q} \\
 & \\
X^3 + X^2 - 2X - 2 & \\
-X^3 + 2X & \\
X^2 - 2 & \\
-X^2 + 2 & \\
0 &
\end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned}
B &= \left(X^2 - 2\right) Q \\
&= \left(X^2 - 2\right)\left(X^2 + X + 1\right) \\
&= \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)\underbrace{\left(X^2 + X + 1\right)}_{\text{irréductible dans } \mathbb{R}[X];\text{ car } \Delta = -3 < 0.}
\end{aligned}$$

Exercice 03.

On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ définie par

$$P(X) = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 20X^2 - 19X + 6.$$

1) Montrons que 2 est une racine de P. En effet,

$$\begin{aligned}
P(2) &= (2)^5 - 2(2)^4 - 6(2)^3 + 20(2)^2 - 19(2) + 6 \\
&= 32 - 32 - 48 + 80 - 38 + 6 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où 2 est une racine de P.

2) Montrons que 1 est une racine triple de P.

D'abord, on sait que 1 est une racine triple de $P \Leftrightarrow P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P'''(1) \neq 0$.

On a

$$\begin{aligned} P(X) &= X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 20X^2 - 19X + 6 \\ &\Rightarrow P'(X) = 5X^4 - 8X^3 - 18X^2 + 40X - 19 \\ &\Rightarrow P''(X) = 20X^3 - 24X^2 - 36X + 40 \\ &\Rightarrow P'''(X) = 60X^2 - 48X - 36. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} P(1) = (1)^5 - 2(1)^4 - 6(1)^3 + 20(1)^2 - 19(1) + 6 = 1 - 2 - 6 + 20 - 19 + 6 = 0 \\ P'1 = 5(1)^4 - 8(1)^3 - 18(1)^2 + 40(1) - 19 = 5 - 8 - 18 + 40 - 19 = 0 \\ P''(1) = 20(1)^3 - 24(1)^2 - 36(1) + 40 = 20 - 24 - 36 + 40 = 0 \\ P'''(1) = 60(1)^2 - 48(1) - 36 = 60 - 48 - 36 = -24 \neq 0. \end{cases}$$

D'où 1 est une racine triple de P.

3) On factorise P en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

D'abord, comme $d^\circ P = 5$, alors P admet **cinq** racines dans $\mathbb{C}$.
De 1), on a 2 est une racine de P; et de 2) on a 1 est une racine triple de P.
Soit maintenant α_5, la cinquième racine de P. Donc

$$2 + 1 + 1 + 1 + \alpha_5 = -\frac{-1}{1} = 2$$

D'où $\alpha_5 = -3$. Finalement, on a $P(X) = (X-2)(X-1)^3(X+3)$.

Exercice 04. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P(X) = X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X - 3.$$

Montrons que i est une racine double de P :

D'abord; $P'(X) = 5X^4 - 12X^3 + 6X^2 - 12X + 1$ et $P''(X) = 20X^3 - 36X^2 + 12X - 12$.
On a

$$\begin{cases} P(i) = i^5 - 3i^4 + 2i^3 - 6i^2 + i - 3 = 0, \\ P'(i) = 5i^4 - 12i^3 + 6i^2 - 12i + 1 = 0, \\ P''(i) = 20i^3 - 36i^2 + 12i - 12 = 24 - 8i \neq 0. \end{cases}$$

Puisque $P(i) = P'(i) = 0$ et $P''(i) \neq 0$, alors i est une racine double de P.

- On factorise P dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme $P \in \mathbb{R}[X]$ et i est une racine double de P, alors $\bar{i} = -i$ est également une racine double de P.

Soit maintenant α_5 la cinquième racine de P, donc

$$i + i + (-i) + (-i) + \alpha_5 = -\frac{-3}{1} = 3.$$

D'où $\alpha_5 = 3$. Finalement, on a

$$\begin{aligned} P(X) &= \underbrace{(X-i)^2 (X+i)^2 (X-3)}_{\text{c'est la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{C}[X]} \\ &= ((X-i)(X+i))^2 (X-3) \\ &= \underbrace{\left(X^2+1\right)(X-3)}_{\text{c'est la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{R}[X]}. \end{aligned}$$

<u>Exercice 05</u>.

1) Soit le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + 1$. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(x-1)^2$ divise P.

D'abord; comme $(x-1)^2$ divise P, alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) = (x-1)^2 Q(x)$. Cela signifie que le réel 1 est une racine (au moins) double de P. D'où $P(1) = P'(1) = 0$.

On a

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + 1 \text{ et } P'(x) = 3ax^2 + 2bx.$$

Or $P(1) = P'(1) = 0$, donc $a + b + 1 = 0$ et $3a + 2b = 0$. Par suite, on a le système

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 & (1) \\ 3a + 2b = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1), on a $a = -b-1$; puis en remplaçant cette valeur de a dans (2) on obtient $-b-3 = 0$; i.e., $b = -3$.

On a donc $a = -b-1 = 2$. D'où $a = 2$ et $b = -3$; i.e., $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

2) On factorise $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

D'abord; comme $(x-1)^2$ divise P, alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) = (x-1)^2 Q(x)$; où $d^\circ Q = 1$.

1$^{\text{ère}}$ Méthode :

Soit α_3 la troisième racine de P, donc $1 + 1 + \alpha_3 = -\frac{-3}{2}$. D'où $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$. Par suite

$$P(x) = \underbrace{2}_{\text{c'est le coefficient de } x^3 \text{ dans } P} (x-1)^2 \left(x + \frac{1}{2}\right).$$

2$^{\text{ère}}$ Méthode :

Pour déterminer le polynôme Q, on effectue la division euclidienne de P par $(x-1)^2$:

$$\begin{array}{rl}
\overbrace{2x^3-3x^2+1}^{P(x)} & x^2-2x+1 \\
-2x^3+4x^2-2x & \underbrace{2x+1}_{Q} \\
 & \\
x^2-2x+1 & \\
-x^2+2x-1 & \\
\underbrace{0}_{R} &
\end{array}$$

D'où $P(x)=(x-1)^2(2x+1)$.

<u>Exercice 06</u>. (Sans déterminer les racines (!))

1) Factoriser X^4+1; puis X^8-1 en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

(a) On factorise le polynôme X^4+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
X^4+1 &= \left(X^2\right)^2+1 \\
&= \left(X^2\right)^2+1+\underbrace{2X^2-2X^2}_{=0} \\
&= \left(\left(X^2\right)^2+1^2+2X^2\right)-2X^2 \\
&= \left(X^2+1\right)^2-2X^2 \quad (\text{car } (a+b)^2=a^2+b^2+2ab) \\
&= \left(X^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}X\right)^2 \\
&= \left(X^2+1-\sqrt{2}X\right)\left(X^2+1+\sqrt{2}X\right) \quad (\text{car } a^2-b^2=(a-b)(a+b)) \\
&= \underbrace{\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)}_{\text{sont irréductibles dans } \mathbb{R}[X];\text{ car } \Delta=-2<0.}.
\end{aligned}$$

(b) On factorise le polynôme X^8-1 dans $\mathbb{R}[X]$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
X^8-1 &= \left(X^4\right)^2-1^2 \\
&= \left(X^4-1\right)\left(X^4+1\right) \quad (\text{car } a^2-b^2=(a-b)(a+b)) \\
&= \left(X^4-1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right) \quad (\text{d'après } \textbf{(a)}) \\
&= \left(\left(X^2\right)^2-1^2\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right) \\
&= \left(X^2-1\right)\underbrace{\left(X^2+1\right)}_{\text{irréductible dans } \mathbb{R}[X];\text{ car } \Delta=-4<0.}\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right) \\
&= (X-1)(X+1)\left(X^2+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)
\end{aligned}$$

2) Factoriser X^6+1; puis $X^{12}-1$ en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

(i) On factorise le polynôme X^6+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} X^6+1 &= \left(X^2\right)^3+1^3 \quad \text{(notons qu'on a aussi } X^6+1=\left(X^3\right)^2+1\text{; mais ...)} \\ &= \underbrace{\left(X^2+1\right)}_{\text{irréductible dans } \mathbb{R}[X]\text{; car } \Delta=-4<0}\left(X^4-X^2+1\right) \quad \left(\text{car } a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\right) \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} X^4-X^2+1 &= \left(X^2+1\right)^2-3X^2 \text{ (on a aussi } X^4-X^2+1=\left(X^2-1\right)^2+X^2\text{ ; mais ...)} \\ &= \left(X^2+1\right)^2-\left(\sqrt{3}X\right)^2 \\ &= \left(X^2+1-\sqrt{3}X\right)\left(X^2+1+\sqrt{3}X\right) \quad \text{(car } a^2-b^2=(a-b)(a+b)\text{)} \\ &= \underbrace{\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)}_{\text{sont irréductibles dans } \mathbb{R}[X]\text{; car } \Delta=-1<0.} \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$X^6+1=\left(X^2+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right).$$

(ii) On factorise le polynôme $X^{12}-1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} X^{12}-1 &= \left(X^6\right)^2-1^2 \\ &= \left(X^6-1\right)\left(X^6+1\right) \quad \text{(car } a^2-b^2=(a-b)(a+b)\text{)} \\ &= \left(X^6-1\right)\left(X^2+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right) \quad \text{(d'après } \textbf{(i)}\text{)} \\ &= \left(\left(X^3\right)^2-1^2\right)\left(X^2+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right) \\ &= \left(X^3-1\right)\left(X^3+1\right)\left(X^2+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right) \end{aligned}$$

Mais, on sait que

$$\begin{cases} X^3-1=(X-1)\underbrace{\left(X^2+X+1\right)}_{\text{sont irréductibles dans } \mathbb{R}[X]\text{; car } \Delta=-3<0.} \\ X^3+1=(X+1)\overbrace{\left(X^2-X+1\right)} \end{cases}$$

Car $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ et $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$. D'où

$$X^{12}-1=(X-1)\left(X^2+X+1\right)(X+1)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right).$$

============★===**Good Luck**===★=================**Fin**