TD- 01 : **30-09-2013**

Problème : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique $p_A(x)$.

(2) Vérifier que $p_A(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$

(3) Calculer A^{-1} (`Utiliser deux méthodes`)

(4) Calculer les éléments propres de A.

(5) Posons

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$$

où $\{\lambda_1, (u_x, u_y)\}$, $\{\lambda_2, (v_x, v_y)\}$ sont les éléments propres de A. Calculer PDP^{-1}.

En déduire le calcul de A^n ; $n \geq 0$

(6) Soit le système de suites

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 2b_n \end{cases} ; \ a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0 \qquad (S_1)$$

(6.1) Écrire (S_1) sous la forme matricielle.

(6.2) Calculer (a_n) et (b_n) en fonction de n.

Solution :

(1) Le calcul de $p_A(x)$:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(1+x) & 2 \\ (1+x) & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (1+x)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (1+x)[-2+x-2] = (1+x)(x-4) \end{aligned}$$

(2) Montrons que $p_A(A) = 0_{M_2(\mathbb{R})}$. En effet, on a

$$p_A(x) = x^2 - 3x - 4$$

Donc

$$\begin{aligned} p_A(A) &= A^2 - 3A - 4I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

(3) Le calcul de A^{-1} (`Par deux méthodes`)

$\mathbf{1}^{ère}$ **méthode :** On sait que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

où $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{2}^{ème}$ **méthode :** Comme $p_A(A) = A^2 - 3A - 4I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$. Il vient

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A - 3I_2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(4) Éléments propres de A :

$\Diamond$) **Valeurs propres :** $\{\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4\}$

$\Diamond$) **Vecteurs propres** : Par définition, on a

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \begin{array}{c} x + 2y = -x \\ 3x + 2y = -y \end{array} \right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = -x\right\} = \{(x,-x) \quad ; x \in \mathbb{R}\} = [(1,-1)] \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \begin{array}{c} x + 2y = 4x \\ 3x + 2y = 4y \end{array} \right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = \frac{3}{2}x\right\} = \left\{\left(x, \frac{3}{2}x\right) \quad ; x \in \mathbb{R}\right\} = \left[\left(1, \frac{3}{2}\right)\right] = [(2,3)] \end{aligned}$$

(5) Posons

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Le calcul de PDP^{-1} :

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
A^n &= \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)...\left(PDP^{-1}\right) = PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & -\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{5}(-1)^n + \frac{2}{5}4^n & \frac{2}{5}4^n - \frac{2}{5}(-1)^n \\ \frac{3}{5}4^n - \frac{3}{5}(-1)^n & \frac{2}{5}(-1)^n + \frac{3}{5}4^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(6.1) Forme matricielle de S_1 :

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}}_{U_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}}_{U_n} \; ; \; \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}}_{U_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)
$$

(6.2) Le calcul de (a_n) et (b_n) en fonction de n : D'après la formule (*), on obtient

$$
U_n = AU_{n-1} = A^2U_{n-2} = ... = A^nU_0
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
U_n &= \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}(-1)^n + \frac{2}{5}4^n & \frac{2}{5}4^n - \frac{2}{5}(-1)^n \\ \frac{3}{5}4^n - \frac{3}{5}(-1)^n & \frac{2}{5}(-1)^n + \frac{3}{5}4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5}(-1)^n + \dfrac{2}{5}4^n \\ \dfrac{3}{5}4^n - \dfrac{3}{5}(-1)^n \end{pmatrix} \; ; \; n \geq 0
\end{aligned}
$$

Et par conséquent

$$
\begin{cases} a_n = \dfrac{3}{5}(-1)^n + \dfrac{2}{5}4^n \\ \\ b_n = \dfrac{3}{5}4^n - \dfrac{3}{5}(-1)^n \end{cases} \; ; \; n \geq 0
$$

Bellaouar.Dj Octobre-2013