# TD- 02 : **07-10-2013**

**Exercice (2.1) :** Soit la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $p_{A_3}(x)$

Calculer les valeurs propres de la matrice : $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

**Solution :** On écrit par définition

$$\begin{aligned}
p_{A_3}(x) &= \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(1+x) & 0 & 1 \\ (1+x) & -(1+x) & 1 \\ 0 & (1+x) & -x \end{vmatrix} \\
&= (1+x)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (1+x)^2 \left[-(x-1)+1\right] = (1+x)^2 (2-x)
\end{aligned}$$

Pour $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned}
p_{A_4}(x) &= \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(1+x) & 0 & 0 & 1 \\ (1+x) & -(1+x) & 0 & 1 \\ 0 & (1+x) & -(1+x) & 1 \\ 0 & 0 & (1+x) & -x \end{vmatrix} \\
&= (1+x)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \\
&= (1+x)^3 (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} + (1+x)^3 (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1+x)^3 (x-2) + (1+x)^3 (-1) = (1+x)^3 (x-3)
\end{aligned}$$

Dans le cas général, on a

$$p_{A_n}(x) = \begin{cases} (1+x)^{n-1} (x-n+1) \,; \text{ si } n \text{ est pair} \\ (1+x)^{n-1} (n-1-x) \,; \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \text{ valeur propre d'ordre } n-1 \ ; \ n \geq 2 \\ \lambda_2 = n-1 \text{ valeur propre simple.} \end{cases}$$

**Exercice** $_{(2.2)}$ **:** Soit le déterminant de **Vendermonde**

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} ; x_0,\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$$

Montrer que $\Delta_2 = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$. Généraliser ?

**Solution :** On a

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ c_2 - c_1 & c_3 - c_2 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 - x_0 & x_2 - x_1 & x_2 \\ x_1^2 - x_0^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ x_1 + x_0 & x_2 + x_1 & x_2^2 \end{vmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - x_1 - x_0) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0). \end{aligned}$$

Généralement, le déterminant de **Vendermonde** est

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x_0 & x_1 & & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & & x_n^2 \\ & & & \\ x_0^n & x_1^n & & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

**Exercice** $_{(2.3)}$ **:**

**Théorème (Voir le cours):** *Les matrice semblables ont même polynome caractéristique.* La réciproque de ce théorème est fausse?

**Contre-exemple :** Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

On voit que $p_A(x) = p_B(x) = (1 - x)^2$. De plus, si $A$ est semblable avec $B$ on peut écrire

$$A = PBP^{-1} = PI_2P^{-1} = I_2 \text{ (Contradiction). Donc } p_A(x) = p_B(x) \nRightarrow\ A \sim B.$$

**Exercice** $_{(2.4)}$ **:** *Soit* $f_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ *un polynome de degré* $n$*, si* $A \sim B$*. Alors*

$$f_n(A) \sim f_n(B)$$

**Solution:** On a

$$\begin{aligned} f_n(A) &= a_0 I + a_1 A + ... + a_n A^n \\ &= a_0 P B^0 P^{-1} + a_1 P B P^{-1} + ... + a_n P B^n P^{-1} \\ &= P(a_0 I + a_1 B + ... + a_n B^n) P^{-1} = P f_n(B) P^{-1}. \end{aligned}$$

Rappelons la définition de $e^A$. Pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... + \frac{A^n}{n!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

**Exercice** $_{(2.5)}$ **:** Prouver que

$$A \sim B \Longrightarrow e^A \sim e^B.$$

**Solution :** Montrons que $A \sim B \Longrightarrow e^A \sim e^B$. En effet, si $A = PBP^{-1}$ il vient

$$\begin{aligned} e^A &= e^{PBP^{-1}} \\ &= I_n + \left(PBP^{-1}\right) + \frac{\left(PBP^{-1}\right)^2}{2!} + ... + \frac{\left(PBP^{-1}\right)^n}{n!} + ... \\ &= PP^{-1} + PBP^{-1} + \frac{PB^2P^{-1}}{2!} + ... + \frac{PB^nP^{-1}}{n!} + ... \\ &= P\left[I + B + \frac{B^2}{2!} + ... + \frac{B^n}{n!} + ...\right] P^{-1} = P\left[e^B\right] P^{-1} \end{aligned}$$

Bellaouar.Dj Octobre-2013