TD- 03 : 21-10-2013

Exercice (1) : Discuter la diagonalisation de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&b&d\\0&1&c\\0&0&a\end{pmatrix},\ \text{selon } a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

Solution : Les valeurs propres de A sont : $\{\lambda_1=1,\ \lambda_2=a\}$. On distingue deux cas :

a) Si $a\neq 1$ $i.e$ $\lambda_1=1$ est une **v.p** double, dans ce cas

$$E_{\lambda_1}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ \begin{array}{c}x+by+dz=x\\y+cz=y\\az=z\end{array}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ \begin{array}{c}by=0\\z=0\end{array}\right\}$$

a-1) Si $b\neq 0$, implique $y=0$. Donc

$$E_{\lambda_1}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ \begin{array}{c}x\text{ quelconque}\\y=0\\z=0\end{array}\right\}=\{(x,0,0)\}\Longrightarrow\dim E_{\lambda_1}=1$$

Et par conséquent, A n'est pas **diago-**

a-2) Si $b=0$, on a

$$E_{\lambda_1}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ z=0\right\}=\{(x,y,0)\}\Longrightarrow\dim E_{\lambda_1}=2$$

$i.e$ A est **diago-**

b) Si $a=1$ $i.e$ $\lambda_1=1$ est une **v.p** d'ordre $3\Longrightarrow Sp(A)=\{\lambda_1\}$, dans ce cas

$$A\text{ est }\textbf{diago-}\Longleftrightarrow A=\lambda_1 I_3\Longleftrightarrow b=c=d=0.$$

Conclusion : La matrice A est diago- si et seulement, si

$$\begin{pmatrix}a\neq 1\text{ et}\\b=0,\ c,d\in\mathbb{R}\end{pmatrix}\text{ ou }\begin{pmatrix}a=1\text{ et}\\b=c=d=0\end{pmatrix}.$$

Exercice (2) : Étudier la diagonalisation de la matrice suivante

$$A=\begin{pmatrix}1&a&b&c\\0&1&d&e\\0&0&2&f\\0&0&0&3\end{pmatrix}\ ;a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$$

Solution : On voit que $\{\lambda_1=2,\ \lambda_2=3$ **v.p** simples et $\lambda_3=1$ **v.p** double$\}$. De plus

$$E_{\lambda_3}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ ;\ \begin{array}{c}x+ay+bz+ct=x\\y+dz+et=y\\2z+ft=z\\3t=t\end{array}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ \begin{array}{c}ay=0\\z=0\\t=0\end{array}\right\}$$

On distinque deux cas :

(**i**) Si $a=0$, on a

$$E_{\lambda_3}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ ;\quad \begin{array}{c} z=0 \\ t=0 \end{array}\right\}=\{(x,y,0,0)\}\Longrightarrow \dim E_{\lambda_3}=2\Longrightarrow A \text{ est } \textbf{diag-}$$

(**ii**) Si $a\neq 0$, on a

$$E_{\lambda_3}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ ;\quad \begin{array}{c} y=0 \\ z=0 \\ t=0 \\ x \text{ quelconque} \end{array}\right\}=\{(x,0,0,0)\}\Longrightarrow \dim E_{\lambda_3}=1\Longrightarrow A \text{ n'est } \textbf{diag-}$$

Conclusion : A est **diag-** si et seulement, si $a=0$ et $b,c,d,\ f$ quelconques.

Exercice (3) : Étudier la diagonalisation de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix};a\in\mathbb{R}$$

Rép : A est **diag-** si et seulement, si $a=0$.

Solution : $\Diamond$) Le calcul de $p_A(x)$:

$$p_A(x)=\begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 4 & 1-x & 2 \\ a & 0 & 3-x \end{vmatrix}=(3-x)^2(1-x)$$

$\Diamond$) **Valeurs propres :**

$$\begin{cases} \lambda_1=1,\ \textbf{v.p} \text{ simple} \\ \lambda_2=3,\ \textbf{v.p} \text{ double} \end{cases}$$

$\Diamond$) **Vecteurs propres :** Calculons le sous-espace propre E_{λ_2} comme suit

$$E_{\lambda_2}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\quad \begin{array}{c} 3x=3x \\ 4x+y+2z=3y \\ ax+3z=3z \end{array}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\quad \begin{array}{c} y=2x+z \\ ax=0 \end{array}\right\}$$

On distinque deux cas :

(**i**) Si $a=0$, on obtient

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ y=2x+z\right\}=\left\{(x,2x+z,z)\in\mathbb{R}^3\ \right\} \\ &= \{x(1,2,0)+z(0,1,1)\}\Longrightarrow \dim E_{\lambda_2}=2\Longrightarrow A \text{ est } \textbf{diag-} \end{aligned}$$

(**ii**) Si $a\neq 0$, on a

$$E_{\lambda_2}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\quad \begin{array}{c} y=z \\ x=0 \end{array}\right\}=\{(0,y,y)\}\Longrightarrow \dim E_{\lambda_2}=1\Longrightarrow A \text{ n'est pas } \textbf{diag-}$$

Bellaouar.Dj