TD- 04 : **28-10-2013**

Exercice $_{(1)}$ **:** On considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Montrer que $A \sim B$.

ii) Trouver une matrice C telle que :

$$A = C.B.C^{-1}$$

Solution : i) D'après un calcul simple, on a

$$p_A(x) = p_B(x) = x^2 - 5x + 4,$$

$\triangleright$ Les valeurs propres de $A =$ Les valeurs propres de $B = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4\}$

Les deux matrices A et B sont diagonalisables, il existe donc deux matrices inversibles P et Q telles que

$$P^{-1}.A.P = Q^{-1}.B.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = D$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} = P.\underbrace{Q^{-1}BQ}.P^{-1} \\ &= C.B.C^{-1} \ ; \ C = PQ^{-1} \end{aligned}$$

Donc $A \sim B$.

ii) Le calcul de C :

$\triangleright$ **Vecteurs propres associés :**

*) Pour la matrice A : $E_{\lambda_1} = \{(-1, 1)\}$ et $E_{\lambda_2} = \{(1, 2)\}$

*) Pour la matrice B : $E_{\lambda_1} = \{(2, 1)\}$ et $E_{\lambda_2} = \{(1, 2)\}$. Donc

$$\begin{aligned} C &= P.Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice $_{(2)}$ **:** On considère la matrice :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} , a \in \mathbb{R}$$

- Trouver les valeurs propres de $A(a)$

- Trouver les paramètres $a \in \mathbb{R}$, pour lesquels la matrice $A(a)$ soit diagonalisable et effectuer dans ce cas la diagonalisation.

Solution : On a
$$p_{A(a)}(x) = (x-1)^2 (x+1)$$

$\triangleright$ Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 1$, valeur propre d'ordre 2 et $\lambda_2 = -1$: valeur propre d'ordre 1, de plus

$$\begin{array}{rcl} \text{Pour } a & = & 3: \ E_{\lambda_1} = \{(1,0,-1),(0,1,1)\} \\ \text{Pour } a & \neq & 3: \ E_{\lambda_1} = \{(0,1,1)\} \end{array}$$

$\triangleright$ L'espace propre associé à $\lambda_2 = -1$ est : $E_{\lambda_2} = \{(0,3,1)\}$. Donc, pour $a = 3$, le sous-espace propre associé à λ_1 est de dimension 2.

Conclusion : $A(a)$ est diagonalisable $\Longleftrightarrow a = 3$

Diagonalisation de $A(3)$:

$$A(3) = P.D.P^{-1} \text{ où } \begin{cases} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A(3)$$

Bellaouar.Dj