TD- 05 : **04-11-2013**

Exercice (1) : Résoudre le système de suites avec les relations de récurrence suivante

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}=3x_n-y_n+1 \\ y_{n+1}=-x_n+3y_n+2 \end{array}\right. ;\ (x_0,y_0)=(1,0) \qquad \text{(S)}$$

Solution : On écrit ce système (S) sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{U_{n+1}}=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}_{U_n}+\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{C}\ ;\ U_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$i.e$ $U_n=AU_{n-1}+C$ et ceci implique

$$U_n=A^nU_0+\left(A^{n-1}+A^{n-2}+...+A+I\right)C$$

$\Diamond$) **Calculons** A^n :

$$A^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}2^n+\frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{2}4^n \\ \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n+\frac{1}{2}4^n \end{pmatrix}=\frac{2^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\frac{4^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Diamond$) **Calculons** $A^{n-1}+A^{n-2}+...+A+I$:

$$\begin{aligned} A^{n-1}+A^{n-2}+...+A+I &= \frac{2^{n-1}+...+2^1+2^0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\frac{4^{n-1}+...+4^1+4^0}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2^n-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\frac{4^n-1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}2^n+\frac{1}{6}4^n-\frac{2}{3} & \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{6}4^n-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{6}4^n-\frac{1}{3} & \frac{1}{2}2^n+\frac{1}{6}4^n-\frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} U_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}2^n+\frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{2}4^n \\ \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n+\frac{1}{2}4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}2^n+\frac{1}{6}4^n-\frac{2}{3} & \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{6}4^n-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{6}4^n-\frac{1}{3} & \frac{1}{2}2^n+\frac{1}{6}4^n-\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\times 2^n+\frac{1}{3}4^n-\frac{4}{3} \\ 2\times 2^n-\frac{1}{3}4^n-\frac{5}{3} \end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x_n=2\times 2^n+\frac{1}{3}4^n-\frac{4}{3} \\ y_n=2\times 2^n-\frac{1}{3}4^n-\frac{5}{3} \end{array}\right. ;n\geq 0 \end{aligned}$$

Exercice (2) : Soit la suite (x_n) définie par

$$x_{n+2}=\frac{2}{\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{x_{n+1}}}\ ;x_0\ ,\ x_1\neq 0$$

Trouver x_n en fonction de n puis, calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}x_n$.

Solution : On écrit

$$x_n=\frac{2}{\dfrac{1}{x_{n-2}}+\dfrac{1}{x_{n-1}}};x_0\ ,\ x_1\neq 0$$

implique

$$\frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{1}{x_{n-1}}$$

Posons $\dfrac{1}{x_n} = y_n$ on obtient

$$2y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \text{ i.e } y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2}$$

Sous la forme matricielle, on a

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} \ ; \ \begin{cases} y_0 = \frac{1}{x_0} \\ y_1 = \frac{1}{x_1} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après un calcul simple, on trouve

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left[2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] & \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] \\ \frac{1}{3}\left[2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] & \frac{1}{3}\left[1 + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] \end{pmatrix}$$

Il vient

$$y_n = \frac{1}{3}\left[2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] y_1 + \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] y_0$$

D'autre part $y_n = \dfrac{1}{x_n}$, implique

$$x_n = \frac{3}{\left[2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] \frac{1}{x_1} + \left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] \frac{1}{x_0}}$$

Finalement, on obtient

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \frac{3}{\dfrac{2}{x_1} + \dfrac{1}{x_0}}$$

Bellaouar.Dj