TD- 06 : **11-11-2013,** Systèmes différentiels + matrices diagonalisables

Exercice (1) : Résoudre le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solution : ♦) Calculons les éléments propres de la matrice A :

$$\left\{\lambda_1 = -1,\ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } \left\{\lambda_2 = 4,\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

Comme $X' = A.X = PDP^{-1}X$, posons $Y = P^{-1}X$, on obtient

$$\begin{cases} X' = PDY \\ Y = P^{-1}X \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} P^{-1}X' = DY \\ Y' = P^{-1}X' \end{cases} \Longrightarrow Y' = DY$$

C'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = 4y_2(t) \end{cases}$$

Et ceci implique

$$\begin{cases} y_1(t) = -c_1 e^{-t} \\ y_2(t) = c_2 e^{4t} \end{cases}$$

et par conséquent, on a

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t} \\ -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t} \end{pmatrix}$$

==

Exercice (2) : a) Calculer e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$; où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) En déduire la solution générale du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + y \quad .... (S) \\ z' = 2z \end{cases}$$

Solution : a) D'après un calcul simple, on trouve

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}_P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}_D\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}_{P^{-1}}$$

Donc

$$\begin{aligned}e^{tA}&=Pe^{tD}P^{-1}\\&=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}_P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}_{e^{Dt}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}_{P^{-1}}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}2^{2t}&\frac{1}{2}2^{2t}&0\\\frac{1}{2}2^{2t}&\frac{1}{2}2^{2t}&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

b) La solution du système différentiel $X'=A.X$ est donnée par :

$$X(t)=e^{At}c=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}2^{2t}&\frac{1}{2}2^{2t}&0\\\frac{1}{2}2^{2t}&\frac{1}{2}2^{2t}&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}2^{2t}c_1+\frac{1}{2}2^{2t}c_2\\\frac{1}{2}2^{2t}c_1+\frac{1}{2}2^{2t}c_2\\c_3e^{2t}\end{pmatrix}$$

Bellaouar.Dj