---

1) Polynôme Caractéristique d'une matrice carrée

Ex 01 : Trouver les polynômes caractéristiques

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$p_{A_1}(x) = (3-x)^2(9-x)$

$p_{A_2}(x) = (1-x)^2(-2-x)$

$p_{A_3}(x) = -(1+x)(2-x)^2$

$p_{A_4}(x) = (3-x)^2(5-x)$

Ex 02 : Trouver le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

rép : $p_A(x) = (3-x)^3(7-x)$

Ex 03 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$$

Vérifier que le polynôme caractéristique est donné par :

$$p_A(x) = x^2 - trace(A)\,x + \det(A)$$

Ex 04 : Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que le polynôme caractéristique est donné par :

$$\boxed{p_M(x) = x^4 - 1}$$

Ex 05 : Prouver que

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; p_A(x) = (x-2)(x-4)^2$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+b & 0 & 1-b \\ a+2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; p_A(x) = -(a-x+1)\left(x^2+3x+2\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; p_A(x) = (x-1)(x-2)^3$$

Ex 06 : Soit le déterminant de Vendermonde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Montrer que $\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)$. Généraliser ?.

Ex 07 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que

$$p_A(x) = (x-1)(x-3)(x+1)$$

Ex 08 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix}$$

Prouver que

$$p_A(x) = (x+3)^2(x-1)$$

Ex 09 : Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

Rép $\Delta = x^{n-1}; n \in \mathbb{N}^*$

Ex 10 : Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que

$$(com\,(A - xI_n))^t = B_0 + xB_1 + ... + x^{n-1}B_{n-1}\ ; B_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

---

2) Sur l'inverse d'une matrice *A*

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, si $det(A) \neq 0$, alors, A^{-1} existe, de plus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,(Com\,(A))^t$$

Ex 11 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Prouver que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 12 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^3 = 5I$, puis, En déduire la formule de A^{-1}.

Ex 13 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Prouver que $(I - A)^3 = 0$.

b) En déduire l'expression de A^{-1} en fonction de I, A et A^2

c) Calculer A^{-1} par deux méthodes.

Ex 14 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & & & \\ & 1 & -\alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -\alpha \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 15 : Soit B une matrice antisymétrique, montrer que la matrice $A = I - B$ est inversible.
Rappel : (A est inversible) $\Leftrightarrow$ ($Ax = 0 \Rightarrow x = 0$).

Ex 16 : Prouver que $\forall\, A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A.\left(com\left(A\right)\right)^t = \det\left(A\right).I_n$$

---

3) Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée Valeurs propres, vecteurs propres d'un Endomorphisme

---

Ex 17 : Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 7,\ E_{\lambda_1} = \{(1,1,1,1)\} \\ \lambda_2 = 3,\ E_{\lambda_2} = \{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\} \end{cases}$$

---

4) Matrices semblables

Ex 18 : *a*) Montrer que

$$A \sim B \Longrightarrow p_A(x) = p_B(x)$$

i.e les matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres. Vérifier que la réciproque de ce théorème est fausse.

b) Prouver aue ‘ *Deux matrices semblables A et B ont même déterminant*’.

c) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Prouver que $A \nsim B$.

Ex 19 : Montrer le Théorème suivant :

Théorème : Soient A et B deux matrices semblables *i.e*

$$A = P.B.P^{-1}$$

alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PB^kP^{-1}$$

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $T_p(A) = P^{-1}AP$, Prouver que :

$$\begin{aligned} 1)\ T_P(I_n) &= I_n,\ T_P(A+B) = T_P(A) + T_P(B) \\ 2)\ T_P(AB) &= T_P(A).T_P(B),\ T_P(rA) = rT_P(A) \\ 3)\ T_P\left(A^k\right) &= \left(T_P(A)\right)^k,\ T_P\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{T_P(A)} \\ 4)\ T_P\left(e^A\right) &= e^{T_P(A)},\ T_Q\left(T_P(A)\right) = T_{PQ}(A) \end{aligned}$$

Ex 20 : Montrer le théorème suivant :

Théorème : La relation "$\sim$ similarité " est une relation d'équivalence.

Ex 21 : On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A \nsim B$; *i.e* A et B ne sont pas semblables.

---

5) Matrices diagonalisables
Diagonalisation d'une matrice

Ex 22 : Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\boxed{A \text{ est diagonalosable } \iff A^t \text{ est diagonalisable}}$$

Ex 23 : Soit A une matrice diagonalisable. Supposons que pour toute valeur propre λ de A on a $\lambda^2 = 2\lambda$. Prouver que

$$A^2 = 2A$$

Soit A une matrice diagonalisable, Montrer que

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = \prod_{\lambda_i \in Sp(A)} \lambda_i$$

<u>Ex 24</u> : Soit $A = P.DP^{-1}$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont données par la matrice

$$D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

Calculer $f(A)$ Pour toute fonction $f(x)$ définie aux points $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Vérifier que

$$\left\{ \begin{array}{c} A^k = PD^kP^{-1} \; ; \; f(x) = x^k \\ \sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1} \; ; \; f(x) = \sqrt{x} \\ \cos A = P(\cos D)P^{-1} \; ; \; f(x) = \cos x \\ e^A = Pe^DP^{-1}, \; \log A = P(\log D)P^{-1} \quad ; \; f(x) = e^x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

<u>Ex 25</u> : Déterminer le réel *a* pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

Soit diagonalisable.

<u>Ex 26</u> : Étudier la diagonalisation des matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rép : A_1) Oui, A_2) Non

<u>Ex 27</u> : Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est **diagonalizable**

<u>Rép</u> : *Il y a trois valeurs propres distinctes : 0, 2 et 4*

<u>Ex 28</u> : Vérifier que la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. **Rép** : *sp*(*A*) = 1,2,3

<u>Ex 29</u> : Soit *f* un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel *E*. Montrer que

$$E=\ker(f)\oplus\operatorname{Im}(f)$$

<u>Ex 30</u> : Soit *f* un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel réel vérifiant $f^k=id_E$ pour un certain entier naturel *k*. Montrer que :

$$f^2=id_E$$

Soit *M* une matrice carrée complexe vérifiant $M^k=I$ pour un certain entier naturel *k*. Montrer que *M* est diagonalisable.

<u>Ex 31</u> : Montrer que

$$\begin{pmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Ex 32</u> : Étudier la **diagonalisabilité** de la matrice suivante

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$Rép\ p_A(x)=x(1-x)(x-4)$

<u>Ex 33</u> : Soit la matrice

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres, puis, En déduire que la matrice *M* est **diagonalisable** dans $\mathbb{C}$**.**

---

6) Exponentielle de matrice, *cos*(*A*), *sin*(*A*), *log*(*matrice*)

<u>Ex 34</u> : Si (λ,*x*) est un élément propre de *A*, alors (*exp*(λ),*x*) est un élément propre de *exp*(*A*). Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer B^2, B^3. En déduire e^B .

Rép

$$\begin{aligned} e^B &= I + B + \frac{B^2}{2!} + 0 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \frac{13}{2} & \frac{9}{2} & \frac{21}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<u>Ex 35</u> : Soit A une matrice carrée possède n valeurs propres distinctes. Posons

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Démontrer que

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Soit la matrice P définie par

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \; ; \; Ax_i = \lambda_i x_i \; \forall 1 \leq i \leq n$$

Prouver que $A.P = P.D$

En déduire que

$$\begin{cases} A^k = P.D^k.P^{-1}; k \in \mathbb{N} \\ A^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1} \quad \text{et} \\ e^A = P.e^D.P^{-1} \end{cases}$$

<u>Ex 36</u> **:** Vérifier que $\forall\ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, on a :

$$A.e^{At} = e^{At}.A$$

On considère la matrice

$$A_\alpha(n) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Prouver que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left[A_\alpha(n)\right]^n=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

<u>Ex 37</u> : Si *M* est une matrice réelle d'ordre *n*, on note par *cosM* la partie réelle de e^{iM} et *sinM* sa partie imaginaire.
Montrer que *cosM* et *sinM* commutent et que

$$(\cos M)^2+(\sin M)^2=I_n$$

Soit θ un réel, calculer

$$\cos\begin{pmatrix}\theta & 1\\ 0 & \theta\end{pmatrix}\text{ et }\sin\begin{pmatrix}\theta & 1\\ 0 & \theta\end{pmatrix}$$

<u>Ex 38</u> : On considère les deux matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Calculer : e^A, e^B En déduire e^F où

$$F=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

<u>Ex 39</u> : Soit

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$$

Calculer *exp(A)*.

<u>Ex 40</u> : Prouver que

$$\det\left(e^A\right)=e^{trace(A)}$$

<u>7) Sur le calcul de *A* puissance</u> *k* (A^k)

<u>Ex 41</u> : Soient les matrices suivantes dont les termes sont des nombres réels

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{ et }T=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a- Montrer que $T^3=0$
b- Montrer que $M=I+T$; *I* est la matrice unité d'ordre *3*

c- On en déduit alors la forme explicite de M^n pour tout entier *n*.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & c \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; c \neq 0$$

Calculer A^k.

Ex 42 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

En utilisant deux méthodes. Prouver que.

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} ; k \geq 1$$

Ex 43 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}. \text{ Calculer } A^k$$

Ex 44 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Prouver que

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 3^n & 1 - 3^n \\ 1 - 3^n & 1 + 3^n \end{pmatrix} \; ; n \geq 0$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que

$$A^n = \frac{3^n - 1}{2} A + \frac{3 - 3^n}{2} I_2 \; ; n \geq 0$$

Ex 45 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes u_0, v_0 et w_0 et les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + 2v_n - 3w_n \end{cases}$$

Écrire ces relations sous la forme :

$$U_{n+1} = M.U_n$$

où M est une matrice que l'on déterminera, et U_n une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Calculer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n et de u_0, v_0 et w_0.

<u>**Ex 46**</u> **:** Montrer que les matrices strictement triangulaires sont nilpotentes.

8) Systèmes de suites avec les relations de récurrence

<u>**Ex 47**</u> **:** Soit le système de suites (x_n), (y_n) défini par

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n + c_1 \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n + c_2 \end{cases} ;\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

Écrire (S) sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n + B$.

Prouver que

$$X_n = A^n X_0 + \left(A^{n-1} + A^{n-2} + ... + A + I\right) B$$

Résoudre le système de suites avec les relations de récurrence suivante

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n - 1 \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n + 2 \end{cases} ;\ (x_0, y_0) = (0, -1)$$

Rép :

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{2n - 3^n + 1}{4} \\ y_n = \dfrac{2n + 3^n - 5}{4} \end{cases} ;\ n \geq 0$$

<u>**Ex 48**</u> **:** Soit $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Si $(A - I_2)^{-1}$ existe, démontrer que

$$A^{n-1} + A^{n-2} + ... + A + I_2 = (A^n - I_2)(A - I_2)^{-1}$$

<u>**Ex 49**</u> **:** Soit la suite (x_n) définie par

$$(*)\ x_{n+k} = a_0x_n + a_1x_{n+1} + ... + a_{k-1}x_{n+k-1}$$

Écrire (*) sous la forme matricielle

$$V_n = A^n V_0 \ ;\ A \in \mathbb{M}_k(\mathbb{R})$$

Montrer que

$$p_A(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - ... - a_1x - a_0$$

<u>**Ex 50**</u> **:** On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_1 = u_2 = 1 \end{cases} \ ...(*)$$

Écrire (*) sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} ; M \in M_2(\mathbb{R})$$

Montrer que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En déduire que

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}; n \in \mathbb{N}^*$$

9) Systèmes différentiels et matrices diagonalisables

Ex 51 : Donner la forme générale d'un système linéaire homogène d'équations différentielles du premier ordre.

Ex 52 : Supposons que *A* est diagonalisable. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \Longleftrightarrow u' = Au$$

Étudier la diagonalisabilité de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^k pour tout entier *k* .
Résoudre le système différentiel

$$X' = A.X$$

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = z(t) \\ z'(t) = w(t) \\ w'(t) = x(t) \end{cases}$$

---

10) Théorème de **Cayley-Hamilton**.

Ex 53 : Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton suivante :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}) : p_A(A) = 0.$$

Est-ce-que la démonstration suivante du théorème de Cayley-Hamilton est vraie ?

$$p_A(x) = \det(A - xI) \Longrightarrow p_A(A) = \det(A - AI) = \det(0) = 0.$$

Ex 54 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}; a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$$

En utilisant le théorème de **Cayley-Hamilton**. Calculer l'inverse de la matrice *A*

rép : $p_A(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

Ex 55 : Trouver le polynôme caractéristique de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}$$

En déduire le polynôme minimal. rép : $p_A(x)=(3-x)^3(7-x)\,,\ m_A(x)=(3-x)(7-x)$

Prouver que la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\dots&1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R})$$

Est diagonalisable.

---

11) Systèmes différentiels et matrices non diagonalisables

Le calcule de e^{tA} .

Ex 56 : Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases}x'=x+y+z\\y'=y+z\\z'=z\end{cases}$$

Ex 57 : Résoudre les systèmes différentiels

1) $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $sp(A)=\{1,0,4\}$

2) $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-6&7\\1&1&-1\\-4&-6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $sp(A)=\{1,1,4\}$

3) $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $sp(A)=\{1,1,1\}$

12) Polynôme minimal

Ex 58 : Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Calculer le polynôme minimal. Qu'en déduire ?

$rép : m_A(x) = x(x-2)$

Calculer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Qu'en déduire ?.

<u>Ex 59</u> : Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ 2)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ 4)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

13) Matrices Trigonalisables

<u>Ex 60</u> : Théorème : Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$

Corollaire : Pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ on a :

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \prod_{\lambda_i \in Sp(A)} \lambda_i$$

Où $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des valeurs propres de *A*.

<u>Ex 61</u> : Trigonaliser les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Ex 62</u> : Considérons la matrice *M* définie par

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quel est le polynôme minimal de *M*.

Montrer que pour tout *n* ∈ N, il existe deux réels α_n et β_n tels que l'on ait

$$M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$$

Calculer α_n et β_n en fonction de *n*. On en déduit alors la forme explicite de M^n pour tout entier *n*.

Ex 63 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs propres de A, puis ses vecteurs propres
Trouver le polynôme minimal de A : $m_A(x)$, et étudier la diagonalisation de A
En utilisant le théorème de **Cayley-Hamilton**. Calculer A^{-1} en fonction de I_3, A et A^2
Trouver une matrice inversible P telle que :

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = B$$

Écrire B sous la forme $D + X$, où D diagonale et $X^2 = 0$, puis vérifier que : $DX = XD$.
En déduire le calcul de B^n en fonction de n

Ex 64 : a) Montrer que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

En utilisant le théorème de **Cayley-Hamilton**. Donner l'expression de B^{-1} en fonction de I, B et B^2.

b) Soit la matrice :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \quad ; a, b \in \mathbb{R}$$

- Déterminer les valeurs a, b pour lesquelles la matrice donnée soit diagonalisable.
- Pour $b = 0$, calculer le polynôme minimal. Qu'en déduire ?.
- Montrer que

$$M_{1,0} \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = T$$

- Calculer T^n.

Indication : Écrire T sous la forme : $T = D + X$ où D est diagonale et X nilpotente $(i.e\ X^k = 0)$.

- Calculer $M_{1,0}^n$.

Remarque 1. Comprendre la question = 1/(2-ε) de la réponse, où ε≃0 positif.

Bellaouar Djamel

GOOD LUCK !