Algebra II

By

Dr. Bellaouar Djamel

February-May 2019

رانا طلبة ماناش

Niveau bas

Algèbre 2, Dj. Bellaouar

ALgèbre II

by Dr. Bellaouar. Djamel

University 08 Mai Guelma.

- Espaces Vectoriels
- Sous-espaces Vectoriels
- Combinaisons linéaires
- Famille génératrice
- Base
- Applications linéaires
- Théorème du rang, Ker f, Im f
  (Noyau d'une application linéaire)
- Matrices Carrées
  - Déterminants
  - polynôme Caractéristique
  - Valeurs et Vecteurs propres
  - Le Calcul de A^{-1} par la méthode des Cofacteurs
  - Théorème de Cayley-Hamilton ($P_A(A) = 0$)
  - Systèmes linéaires (Méthode de Crammer et A^{-1})
  - Le Calcul de A^n; où $A \in M_2(\mathbb{R})$.
  - Applications linéaires et matrices

Espace Vectoriel (définition)

Soit E un ensemble non vide et soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit "$+$" une loi interne sur E, i.e

$$\forall\, u, v \in E \Rightarrow u + v \in E$$

Soit "$\cdot$" une loi externe sur E, i.e

$$\forall\, h \in \mathbb{K},\ \forall\, v \in E \Rightarrow h \cdot v \in E$$

$(E, +, \cdot)$ est un espace Vectoriel sur $\mathbb{K}$

$\Leftrightarrow$

- $(E, +)$ est un groupe Abélien
- $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, u, v \in E$:
  $$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$$
- $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall\, v \in E$:
  $$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$$
- $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall\, v \in E$:
  $$\alpha \cdot (\beta \cdot v) = \alpha\beta \cdot v$$
- $\forall\, v \in E$: $\quad 1 \cdot v = v$

Exemple $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace Vectoriel sur $\mathbb{R}$, avec

$+$: $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

$\cdot$: $h \cdot (x, y, z) = (hx, hy, hz)$

• $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension n^2.

• $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension 4.

$$\forall\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

On a

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

De même, on a

$$\forall\ h \in \mathbb{R},\ \forall\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$h \cdot A = \begin{bmatrix} ha & hb \\ hc & hd \end{bmatrix}$$

• $\forall\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• La famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ est dite la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Espaces Vectoriels usuels

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ et $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, de dimension n

i.e $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{C}^n = n$

- $\forall\, x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

- $\forall\, h \in \mathbb{R},\ \forall\, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$h \cdot x = (hx_1, hx_2, \dots, hx_n)$

- $\forall\, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire :

$$x = x_1 (1, 0, \dots, 0) + x_2 (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n (0, 0, \dots, 0, 1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

La famille $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est dite la base Canonique de $\mathbb{R}^n$.

- La base Canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\{(1,0), (0,1)\}$
- La base Canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

La base Canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

- $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{C}_n[x]$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, de dimension $n+1$.

i.e $\dim \mathbb{R}_n[x] = \dim \mathbb{C}_n[x] = n+1$.

$\forall f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

$\forall \varphi = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$, on a

$$f + \varphi = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \cdots + (a_n + b_n) x^n$$

De même, on a

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,

$$\lambda \cdot f = (\lambda a_0) + (\lambda a_1) x + \cdots + (\lambda a_n) x^n$$

La famille

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ st dite

la base Canonique de $\mathbb{R}_n[x]$

- La base Canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ st

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$

- La base Canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ st

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$

- La base Canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ st

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- Sous-espace Vectoriel :

Rappel : soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur le Corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit $F \subset E$.

F est un sous-espace vectoriel de E $\Longleftrightarrow$

- $0_E \in F$
- $\forall\, u, v \in F \Rightarrow u+v \in F$
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, v \in F \Rightarrow \lambda \cdot v \in F$

Exemple (1) : Soient $E = \mathbb{R}^2$, et

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x+y=0\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Solution :

- Comme $0+0=0$, donc $(0,0) \in F$ d'où $0_{\mathbb{R}^2} \in F$.
- Soient $u=(x,y)$, $v=(x',y') \in F$

i.e $\begin{cases} x+y=0 & \dots (*) \\ x'+y'=0 \end{cases}$

on $u+v = (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$

avec $x+x'+y+y' = 0$ (d'après $(*)$).

D'où $u+v \in F$.

• Soient $h \in \mathbb{R}$ et $v = (x, y) \in F$

on a $h v = h(x, y) = (hx, hy)$

Comme $x + y = 0 \Rightarrow hx + hy = 0$

$\Rightarrow (hx, hy) \in F$

$\Rightarrow h(x, y) \in F$

$\Rightarrow h v \in F.$

Remarque :

F est un sous-espace vectoriel de E $\Longleftrightarrow$

- $0_E \in F$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in F$

$\Rightarrow \alpha u + \beta v \in F.$

• Montrons que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

① $(0, 0) \in F$ ✓

② Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y), v = (x', y') \in F$

Comme $x + y = 0$ et $x' + y' = 0$

$\Rightarrow \alpha x + \alpha y = 0$ et $\beta x' + \beta y' = 0 \cdots \cdots (*)$

Mais $\alpha u + \beta v = \alpha(x, y) + \beta(x', y')$

$= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$

avec

$\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' = 0$ (d'après $(*)$)

d'où $\alpha u + \beta v \in F.$

Sous-espace Vectoriel (suite)

$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E

$\Longleftrightarrow$ • $0_E \in F$

• $\forall\, u, v \in F,\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$\alpha u + \beta v \in F$$

C'est-à-dire F est non vide et stable par combinaison linéaire.

Exemple : Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + z = 0\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution : On sait que $\mathbb{R}^3$ est un e.v sur $\mathbb{R}$.

1. $(0, 0, 0) \in F$; car $0 - 0 + 0 = 0$

2. Soient $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z') \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; on a

$$\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$$

Comme $x - y + z = 0$ et $x' - y' + z' = 0$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta x' - (\alpha y + \beta y') + \alpha z + \beta z' = 0$$

$$\Rightarrow \alpha u + \beta v \in F.$$

Sous-espaces Vectoriels (Exemples)

Exemple ① Soit

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 2\}$$

F_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$; car $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin F_1$.

Exemple ② Soit

$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$$

Montrer que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution :

1. Comme $0+0+0=0$, donc $(0,0,0) \in F_2$.
2. Soient $u=(x,y,z)$, $v=(x',y',z') \in F_2$

   C'est-à-dire $x+y+z=0$ et $x'+y'+z'=0$

   Mais

   $$u+v = (x+x', y+y', z+z'),$$ avec

   $x+x'+y+y'+z+z'=0$. D'où $u+v \in F_2$.
3. Soient $h \in \mathbb{R}$ et $v=(x,y,z) \in F_2$

   On a

   $hv = (hx, hy, hz)$ avec $hx+hy+hz = h(x+y+z)=0$

   Car $x+y+z=0$. D'où $hv \in F_2$.

Exemple 3 Soit

$$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 2y \text{ et } z = 0\}$$

Montrer que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution :

1. $F_3 \neq \phi$; Car $(0,0,0) \in F_3$.

2. Soient $u = (x,y,z)$, $v = (x',y',z') \in F_3$

C'est-à-dire $\begin{cases} x = 2y\,, & z = 0 \\ x' = 2y'\,, & z' = 0 \end{cases}$

On a

$$u + v = (x + x', y + y', z + z') \quad \text{avec}$$
$$x + x' = 2(y + y') \text{ et } z + z' = 0.$$

D'où $u + v \in F_3$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v = (x,y,z) \in F_3$

Comme $x = 2y$ et $z = 0$

$\Rightarrow \alpha x = 2(\alpha y)$ et $\alpha z = 0$

$\Rightarrow (\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha(x,y,z) \in F_3$.

D'où $\alpha . v \in F_3$.

Exemple 4 Soit

$$F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

Montrer que F_4 n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Solution :

1. On voit que $(0,0,0) \in F_4$
2. Contre-exemple :

pour $v = (1,0,0) \in F_4$,

$\lambda = 2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\lambda v = (2,0,0) \notin F_4}$$

Remarque : $(2,0,0) \notin F_4$; car $2^2+0^2+0^2 = 4 > 1$.
D'où F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : On a aussi $(1,0,0), (0,1,0) \in F_4$

Mais, $(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0) \notin F_4$

Exemple 5 Soit

$$F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, xy = 0\}$$

Montrer que F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution : $F_5 \neq \emptyset$; car $(0,0,0) \in F_5$. De plus, on a $(1,0,2), (0,1,3) \in F_5$, mais,

$(1,0,2) + (0,1,3) = (1,1,5) \notin F_5$.

Exemple 6 : Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et

Soit F_6 le sous-ensemble de E défini par :

$$F_6 = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} \in E \; ; \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que F_6 est un sous-espace vectoriel de E.

Solution :

1. On a $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in F_6 \Rightarrow F_6 \neq \emptyset$

2. Soient

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ -b' & c' \end{bmatrix} \in F_6$$

on a

$$A + B = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ -(b+b') & c+c' \end{bmatrix} \in F_6$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} \in F_6$

on a

$$\alpha . A = \begin{bmatrix} \alpha a & (\alpha b) \\ -(\alpha b) & \alpha c \end{bmatrix} \in F_6 .$$

D'où F_6 est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 7 Soit

$$F_7 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, 2f(0) = f(2) \}$$

prouver que F_7 est un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution :

$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ = L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$f_* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_*(x) = 0$$ C'est la fonction nulle.

1. $f_* \in F_7$; car $2f_*(0) = 0$ et $f_*(2) = 0$.

2. Soient $f, g \in F_7$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2f(0) = f(2) \\ 2g(0) = g(2) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2(f+g)(0) &= 2f(0) + 2g(0) \\ &= f(2) + g(2) \\ &= (f+g)(2). \end{aligned}$$ D'où $f+g \in F_7$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f \in F_7$, on a

$$\begin{aligned} 2(\alpha f)(0) = \alpha \cdot 2f(0) &= \alpha f(2) \\ &= (\alpha f)(2) \end{aligned}$$

D'où $\alpha f \in F_7$.

Exemple 8 Soit

$$F_8 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, f(2) = f(0) + 2 \}$$

Montrer que F_8 n'est pas un s.e.v de E, où $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution : on voit que $f_* \notin F_8$;

Car $f_*(2) = 0$ et $f_*(0) + 2 = 2$.

Donc F_8 n'est pas un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exemple 9 : Soit $n \geq 1$, et soit

$$F_9 = \{ P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, d^\circ P = n \}$$

prouver que F_9 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution : Notons que

$$\mathbb{R}_n[X] = \{ \underset{\text{polynôme}}{P} \text{ tel que } \underset{\text{degré}}{d^\circ} P \leq n \}$$

par exemple,

- $\mathbb{R}_2[X] = \{ P \,/\, d^\circ P \leq 2 \}$
- $\underset{\text{Le polynôme nul}}{0} = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

On sait que $d^\circ(\underbrace{\text{polynôme nul}}_{0}) = -\infty$

Donc $0 \notin F_g$.

D'où F_g n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$

$2^{\text{ème}}$ méthode :

pour $f = x^n$ et $\varphi = x^{n-1} - x^n$

on a $f, \varphi \in F_g$; car $d^\circ f = d^\circ \varphi = n$.

Mais, $f + \varphi = x^{n-1} \notin F_g$; car

$$d^\circ x^{n-1} = n-1 < n.$$

Donc F_g n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}_n[x]$.

Devoir : Soit

$$F = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle/\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Remarque :

$$0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0).$$

Combinaison linéaire (Définition)

Rappel : Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit $v_1, v_2, \dots, v_n$ et v des vecteurs de E

on a :

v est une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_n$

$\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, h_1, h_2, \dots, h_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n$$

Exemple 1 : Soient $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ et $v = (x, y)$. Écrire v comme combinaison linéaire de v_1 et v_2.

Solution : On voit que

$$(x, y) = \underset{\substack{\uparrow \\ h_1}}{x}(1, 0) + \underset{\substack{\uparrow \\ h_2}}{y}(0, 1)$$

Exemple 2 : Soit $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (2, 1)$ et $v = (1, 5)$. Écrire le vecteur v comme combinaison linéaire de v_1 et v_2.

Solution :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha v_1 + \beta v_2$

Ceci implique

$$(1,5) = \alpha(1,-1) + \beta(2,1)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 & \ldots\ldots (1) \\ -\alpha + \beta = 5 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

De l'équation (2), $\beta = 5 + \alpha$

$\Rightarrow \alpha = -3$ et $\beta = 2$.

D'où

$$(1,5) = -3(1,-1) + 2(2,1)$$

ou bien, $v = -3v_1 + 2v_2$

Devoir : Dans l'espace Vectoriel $\mathbb{R}^3$ écrire le vecteur $v = (1,-2,5)$ comme combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2 et v_3 où $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3)$ et $v_3 = (2,-1,1)$.

Solution :

$$v = -6v_1 + 3v_2 + 2v_3.$$

Question : Est-ce que $v \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$

Rép : oui ; car

$$\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \;/\; v = \underset{\substack{\uparrow \\ -6}}{\alpha} v_1 + \underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{\beta} v_2 + \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{\gamma} v_3$$

Famille génératrice (définition)

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est génératrice de E

$\Longleftrightarrow \forall v \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} /$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Exemple :

1. La famille $\{(1,0), (0,1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$; Car

$\forall v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_1}}{x} \cdot (1, 0) + \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_2}}{y} (0, 1)$$

Remarque :

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est génératrice de E

$\Longleftrightarrow E = \text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$\Longleftrightarrow$ E est engendré par les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$.

$\Longleftrightarrow E = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\}$

2) La famille $\{(1,2), (-1,1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$, car

$\forall\, v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(x,y) = \underbrace{\frac{x+y}{3}}_{\alpha}(1,2) + \underbrace{\frac{y-2x}{3}}_{\beta}(-1,1)$$

$$= \alpha\cdot(1,2) + \beta\cdot(-1,1)$$

Famille libre (définition)

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est libre de E

$\Leftrightarrow \forall\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Exemple : La famille $\{(1,2), (-1,1)\}$ est libre de $\mathbb{R}^2$.

Solution : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\alpha(1,2) + \beta(-1,1) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc $\{(1,2), (-1,1)\}$ est libre.

• Base

Rappel : Soit E un espace Vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit $v_1, v_2, \dots, v_n \in E$.

La famille $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base de $E \iff \begin{cases} \text{1. } E = \text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \\ \text{2. } v_1, v_2, \dots, v_n \text{ sont libre} \end{cases}$

Notons que $E = \text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow$ E est engendré par $v_1, v_2, \dots, v_n$; ou bien, on dit que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une partie génératrice de E.

par exemple $\{(1,0), (0,1)\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^2$; car

$$\mathbb{R}^2 = \{x(1,0) + y(0,1) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

• La famille $\{1, x, x^2\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$; car

$$\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,/\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \text{Vect}\{1, x, x^2\}.$$

Exemple 1 : La famille $\{(1,-1),(2,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Solution :

① Montrons que $\{(1,-1),(2,1)\}$ est libre

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(1,-1)+\beta(2,1)=(0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=0 \\ -\alpha+\beta=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=0.$$

② Montrons que $\mathbb{R}^2=\text{Vect}\{(1,-1),(2,1)\}$

En effet, Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$(x,y)=\alpha(1,-1)+\beta(2,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=x \\ -\alpha+\beta=y \end{cases} \Rightarrow \beta=\frac{x+y}{3},$$

et $\alpha=\dfrac{x-2y}{3}$

D'où

$$(x,y)=\frac{x-2y}{3}(1,-1)+\frac{x+y}{3}(2,1)$$

Donc $(x,y)\in\text{Vect}\{(1,-1),(2,1)\}$

Et comme $\text{Vect}\{(1,-1),(2,1)\}\subset\mathbb{R}^2$, on a l'égalité.

• Applications linéaires :

Rappel : Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

$(f$ est linéaire$) \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} ① \ \forall u, v \in E : \\ \quad f(u+v) = f(u) + f(v) \\ ② \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in E : \\ \quad f(\alpha v) = \alpha f(v) \end{array}}$$

$(f$ est linéaire$) \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E :$

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Quelques Exemples :

Exemple 1 : Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \longmapsto x + y + z$$

Montrer que f est linéaire.

• Soient $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

Nous avons

$$u + v = (x + x', y + y', z + z')$$

Donc

$$f(u+v) = f(x+x', y+y', z+z')$$
$$= x+x' + y+y' + z+z'$$
$$= (x+y+z) + (x'+y'+z')$$
$$= f(x,y,z) + f(x',y',z')$$
$$= f(u) + f(v).$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

on a $\alpha v = \alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

Donc

$$f(\alpha v) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$
$$= \alpha x + \alpha y + \alpha z$$
$$= \alpha(x+y+z)$$
$$= \alpha f(x,y,z)$$
$$= \alpha f(v)$$

2ème méthode :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u = (x,y,z)$, $v = (x',y',z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$.

On a

$$\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$$

Donc

$$f(\alpha u+\beta v) = f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z')$$
$$= \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z'$$
$$= \alpha(x+y+z) + \beta(x'+y'+z')$$
$$= \alpha\, f(x,y,z) + \beta f(x',y',z')$$
$$= \alpha\, f(u) + \beta\, f(v).$$

D'où f est linéaire.

Exemple 02 : Soit l'application

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = (y, x, x-2y)$$

Montrer que f est linéaire.

Solution :

- Soient $u=(x,y)$, $v=(x',y') \in \mathbb{R}^2$

On a

$$u+v = (x+x', y+y')$$

Donc

$$g(u+v) = g(x+x', y+y')$$
$$= (y+y', x+x', x+x'-2(y+y'))$$
$$= (y, x, x-2y) + (y', x', x'-2y')$$

$= g(x,y) + g(x',y')$

- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

on a $\alpha v = (\alpha x, \alpha y)$

Donc

$$
\begin{aligned}
g(\alpha v) &= g(\alpha x, \alpha y) \\
&= (\alpha y, \alpha x, \alpha x - 2(\alpha y)) \\
&= \alpha (y, x, x - 2y) \\
&= \alpha\, g(x,y).
\end{aligned}
$$

D'où g est linéaire.

Exemple 3 : Soit l'application

$$
\begin{aligned}
h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x,y) &\longmapsto xy
\end{aligned}
$$

Montrer que h n'est pas linéaire.

Solution :

Contre-exemple : pour $u = (1,2)$, $v = (0,-1)$

on a

- $u + v = (1,1)$
- $h(u) + h(v) = 2 + 0 = 2$
- $h(u+v) = h(1,1) = 1$

i.e $h(u+v) \neq h(u) + h(v)$

Donc h n'est pas linéaire.

Exemple 4 : Soit l'application

$$k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a, b) \longmapsto a\sin x + b\cos y,$$

où $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que k est linéaire.

Solution : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $u = (a, b)$, $v = (a', b') \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$\alpha u + \beta v = (\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b')$$

Donc

$$k(\alpha u + \beta v) = [\alpha a + \beta a'] \sin x + [\alpha b + \beta b'] \cos y$$
$$= \alpha [a \sin x + b \cos y] + \beta [a' \sin x + b' \cos y]$$
$$= \alpha k(a, b) + \beta k(a', b').$$

i.e k est linéaire.

Exemple 5 : Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2.

On Considère l'application

$$\ell : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$P \longmapsto \ell(P) = (P(1), P'(1), P''(1))$$

Montrer que ℓ est linéaire.

Solution : • Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$

on a $(P+Q)(1) = P(1) + Q(1)$

$(P+Q)'(1) = P'(1) + Q'(1), \dots$

Donc

$$\ell(P+Q) = \left((P+Q)(1), (P+Q)'(1), (P+Q)''(1)\right)$$
$$= \left(P(1)+Q(1), P'(1)+Q'(1), P''(1)+Q''(1)\right)$$
$$= \left(P(1), P'(1), P''(1)\right) + \left(Q(1), Q'(1), Q''(1)\right)$$
$$= \ell(P) + \ell(Q)$$

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\ell(\alpha P) = \left((\alpha P)(1), (\alpha P)'(1), (\alpha P)''(1)\right)$$
$$= \left(\alpha P(1), \alpha P'(1), \alpha P''(1)\right)$$
$$= \alpha\left(P(1), P'(1), P''(1)\right)$$
$$= \alpha\, \ell(P).$$

i.e ℓ est linéaire.

Exemple 6 : Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, x+1) \end{array}$$

Montrer que f n'est pas linéaire.

Solution :

Linéaire

Règle : $f : E \longrightarrow F \Rightarrow f(0_E) = 0_F$

i.e si $f(0_E) \neq 0_F \Rightarrow f$ n'est pas linéaire.

par l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto (x+y, x+1)$$

on voit que

$$f(0,0) = (0, 1) \neq (0,0)$$

Donc f n'est pas linéaire.

2ème méthode : Soient $u = (x, y)$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$

on a $u + v = (x + x', y + y')$

Donc

$$f(u+v) = (x + x' + y + y', x + x' + 1)$$

Mais

$$f(u) + f(v) = (x+y, x+1) + (x'+y', x'+1)$$
$$= (x + x' + y + y', x + x' + 2)$$

D'où $f(u+v) \neq f(u) + f(v)$

i.e f n'est pas linéaire.

Notation : on note par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F. i.e.,

$$\mathcal{L}(E,F) = \{ f : E \longrightarrow F \ / \ f \text{ est linéaire} \}$$

De même, on a

$$\mathcal{L}(E) = \{ f : E \longrightarrow E \ / \ f \text{ est linéaire} \}$$

Exercice 1 : Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$

Solution :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et pour tous $u, v \in E$, on a

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\alpha u + \beta v) &= g\left[f(\alpha u + \beta v) \right] \\
&= g\left[\alpha f(u) + \beta f(v) \right] \ ; \text{ car } f \text{ est linéaire} \\
&= \alpha g\left(f(u)\right) + \beta g\left(f(v)\right) \ ; \text{ car } g \text{ est linéaire} \\
&= \alpha (g \circ f)(u) + \beta (g \circ f)(v)
\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est linéaire.

Exercice 2 Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective et $g : F \longrightarrow G$ une application. Montrer que

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E,G) \Rightarrow g \in \mathcal{L}(F,G)$$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

Solution : Soient $u, v \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
Comme $f : E \longrightarrow F$ est surjective, $\exists\, u', v' \in E$ tels que $u = f(u')$ et $v = f(v')$. Donc

$$\begin{aligned}
g[\alpha u + \beta v] &= g\left[\alpha f(u') + \beta f(v')\right] \\
&= g\left[f(\alpha u' + \beta v')\right] ; \quad \text{car } f \text{ est linéaire.} \\
&= (g \circ f)(\alpha u' + \beta v') \\
&= \alpha (g \circ f)(u') + \beta (g \circ f)(v') \\
&\quad \text{car } g \circ f \text{ est linéaire} \\
&= \alpha\, g[f(u')] + \beta\, g[f(v')] \\
&= \alpha\, g(u) + \beta\, g(v).
\end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

Exercice 3 Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ i.e f et g sont linéaires. Montrer que

$$f\left[\operatorname{Ker}(g \circ f)\right] = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$$

Solution : (on sait que $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$)

$\Rightarrow$ Montrons que $f\left[\operatorname{Ker}(g \circ f)\right] \subset \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

Soit $v \in f\left[\operatorname{Ker}(g \circ f)\right]$, il existe $v' \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ tel que $v = f(v')$. D'où $v \in \operatorname{Im} f$. ....(1)

D'autre part, on a

$$v' \in \operatorname{Ker}(g \circ f) \Rightarrow (g \circ f)(v') = 0_E$$

$$\Rightarrow g\left[f(v')\right] = 0_E$$

$$\Rightarrow f(v') \in \operatorname{Ker} g$$

$$\Rightarrow f(v') = v \in \operatorname{Ker} g. \quad \dots (2)$$

D'après (1) et (2), on trouve $v \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

$\Leftarrow$ Montrons que $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f \subset f\left[\operatorname{Ker}(g \circ f)\right]$.

Soit $v \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$

$$\Rightarrow \begin{cases} v \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g(v) = 0_E \\ v \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, v' \in E \text{ tel que } v = f(v') \end{cases}$$

Il vient

$$g\left[f(v')\right] = (g \circ f)(v') = 0_E$$

D'où $v' \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, et par conséquent $f(v') = v \in f\left[\mathrm{Ker}(g \circ f)\right]$.

Devoir : Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\boxed{\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}(f \circ f)}$$

رانا طلبة ماناش

Niveau bas

Algèbre 2, Dj. Bellaouar

Noyau d'une application linéaire ($\ker f$)

Définition : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

Le noyau de f (noté $\ker f$) est défini par

$$\boxed{\ker f = \{ v \in E \;/\; f(v) = 0_F \}},$$ où

E et F sont deux espaces vectoriels.

Exemples

1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto (y+z,\; x+y+z,\; x)$$

Calculer $\ker f$.

Solution : par définition, on a

$$\ker f = \{ v \in E \;/\; f(v) = 0_F \}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; (y+z,\; x+y+z,\; x) = (0,0,0) \}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{matrix} y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x=0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{matrix} x=0 \\ y=-z \end{matrix} \right\}$$

$$= \{ (0, -z, z) \;|\; z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ z(0,-1,1) \;|\; z \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}\{(0,-1,1)\}$$

Donc $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $v = (0,-1,1)$

2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x,y,z) \longmapsto x+y+z$$

Calculer $\mathrm{Ker} f$.

Solution: par définition, on a

$$\mathrm{Ker} f = \{ v \in E \,/\, f(v) = 0_F \}$$
$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0 \}$$
$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = -x-y \}$$
$$= \{ (x,y,-x-y) \,/\, x,y \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \,/\, x,y \in \mathbb{R} \}$$
$$= \mathrm{Vect}\{ (1,0,-1), (0,1,-1) \}$$

Donc $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs :

$v_1 = (1,0,-1)$ et $v_2 = (0,1,-1)$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \longmapsto (y, x, x - 2y)$$

Calculer $\operatorname{Ker} f$.

Solution : on a

$$\operatorname{Ker} f = \{ v \in E \mid f(v) = 0_F \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y, x, x - 2y) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \{ (0, 0) \}.$$

4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \longmapsto (-2x + y + z, x - 2y + z)$$

Calculer $\operatorname{Ker} f$.

Solution : on a

$$\operatorname{Ker} f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0) \}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \}$$

$$= \{ (x, x, x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \{ x (1, 1, 1) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \operatorname{Vect} \{ (1, 1, 1) \}.$$

5 Soit $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$$P \longmapsto f(P) = P'$$

Calculer $\mathrm{Ker}\, f$.

Solution : par définition, on a

$$\mathrm{Ker}\, f = \{ v \in E \;/\; f(v) = 0_F \}$$

$$= \{ P \in \mathbb{R}_2[x] \;/\; P' = 0 \}$$ ← le polynôme nul

$$= \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \;/\; a_1 + 2a_2 x = 0 \}$$

$$= \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \;/\; \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_0 \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$= \{ a_0 \;/\; a_0 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ a_0 \cdot 1 \;/\; a_0 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \mathrm{Vect}\{1\}.$$

6 Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$(x, y, z, t) \longmapsto (x - 2y,\; x - 2y - 3z,\; 0,\; x - y - z - t)$$

Calculer $\mathrm{Ker}\, f$.

Solution : par définition, on a

$$\operatorname{Ker} f = \{ v \in E \,/\, f(v) = 0_F \}$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle/\, \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ x - y - z - t = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle/\, \begin{array}{l} x = 2y \\ z = 0 \\ t = y \end{array} \right\}$$

$$= \{ (2y, y, 0, y) \,/\, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ y\,(2,1,0,1) \,/\, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \operatorname{Vect}\{ (2,1,0,1) \}$$

Donc $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(2,1,0,1)$.

Théorème du rang :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire i.e $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f}$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors

$$f \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$$

Exemple 1 : Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (-2x+y+z,\ x-2y+z)$$

① Montrer que f est une application linéaire.

② Donner une base de $\operatorname{Ker} f$, puis, en déduire $\dim \operatorname{Im} f$.

Solution :

① Soient $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. On a

$f(u+v) = f(x+x', y+y', z+z')$

$= \left(-2(x+x')+y+y'+z+z',\ x+x'-2(y+y')+z+z'\right)$

$= (-2x+y+z,\ x-2y+z) + (-2x'+y'+z',\ x'-2y'+z')$

$= f(x,y,z) + f(x',y',z') = f(u)+f(v).$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$
$$= \left(-2(\alpha x) + \alpha y + \alpha z, \alpha x - 2(\alpha y) + \alpha z\right)$$
$$= \alpha\left(-2x + y + z, x - 2y + z\right)$$
$$= \alpha f(x, y, z) = \alpha f(u).$$

D'où f est linéaire.

(2) Calculons $\operatorname{Ker} f$: on a

$$\operatorname{Ker} f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x, y, z) = (0, 0)\right\}$$
$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\}$$
$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = y = x\right\}$$
$$= \left\{(x, x, x) \,/\, x \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{x(1, 1, 1) \,/\, x \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \operatorname{Vect}\left\{(1, 1, 1)\right\}.$$

La famille $\{(1, 1, 1)\}$ est libre $\Rightarrow$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

- D'après le théorème du rang, on a
  $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2.$

Exemple 2 : Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (-2x+y+z, x-2y, x-z)$$

Calculer $\dim \operatorname{Ker} f$, puis, en déduire $\dim \operatorname{Im} f$.

Solution : par définition, on a

$$\operatorname{Ker} f = \{ v \in E \mid f(v) = 0_F \}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{array}{l} -2x+y+z=0 \\ x-2y=0 \\ x-z=0 \end{array} \right\}$$
$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x=y=z=0 \}$$
$$= \{ (0,0,0) \}$$

donc $\dim \operatorname{Ker} f = 0$.

D'après le théorème du rang, on a

$\dim \operatorname{Im} f = 3$.

Rappel : $\dim \{ 0_E \} = 0$

• Matrice Carrée : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ où } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

• Déterminant d'une matrice Carrée.

On le note par $\det(A)$ ou $|A|$

• $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

• $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple : Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

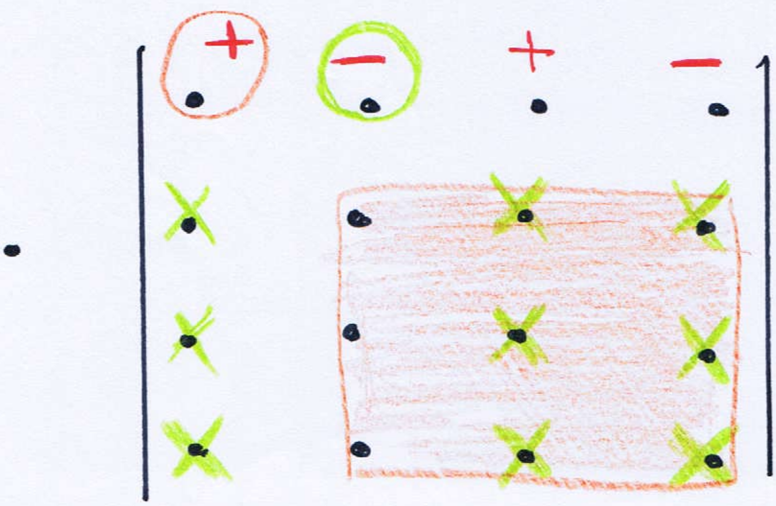
Calculer le déterminant de A.

Solution : Nous avons

$$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (-14-2) + 2(-2+1) + 3(2+7)$$

$= 9$. D'où $\det(A) = 9$



Exemple : Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer det(A).

on a

$$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + & - \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \end{array} - 2 \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$- \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \end{array} - 3 \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \cdots \quad \cdots \quad = 7.$$

• polynôme Caractéristique d'une matrice Carrée.

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice Carrée i.e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Le polynôme Caractéristique de A est défini par :

$$P_A(x) = \det(A - x I_n)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

• On présente une méthode pour Calculer le déterminant $P_A(x)$ et Calculer ses racines en même temps.

Exemple (1) : Calculer le polynôme Caractéristique de la matrice Suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution : par définition, on a

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$1^{ère}$ Colonne (C_1) $\downarrow$ $C_1 + C_2$

$$= \begin{vmatrix} (3-x) & 1 \\ (3-x) & 2-x \end{vmatrix} = (3-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)(2-x-1) = (3-x)(1-x)$$

Définition : Soit A une matrice Carrée. Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(x)$.

Donc les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ sont } \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Exemple (2) : Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de A.

Solution :

- Calculons le polynôme Caractéristique de A

Nous avons

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C_1 \\ \downarrow \\ C_1 - C_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} C_2 \\ \downarrow \\ C_2 - C_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ x & -x & 1 \\ 0 & x & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= x^2 \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} + & \quad - & \quad + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= x^2 \cdot \left[-(x-1-1) + (1-0) \right]$$

$$= x^2 (3-x)$$

d'où $\boxed{P_A(x) = x^2(3-x)}$

Les valeurs propres de A sont 0 et 3.

Exemple (3) : Calculer les valeurs propres de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

on sait que : les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(x)$

• Calculons $P_A(x)$:

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} \underline{1-x} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{1-x} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \underline{1-x} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \underline{1-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 1 \\ x & -x & 0 & 1 \\ 0 & x & -x & 1 \\ 0 & 0 & x & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= x^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = x^3 \left\{ - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= x^3 \left\{ -\left[-(x-1-1) + 1 \right] - \left[1 \right] \right\} = x^3 (x-4).$$

d'où $P_A(x) = x^3(x-4)$ Les racines sont 0 et 4.

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée (suite)

Définition : On appelle polynôme caractéristique de A (où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), le polynôme

$$P_A(x) = \det(A - x\, I_n), \text{ avec}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

on $A - x\, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{bmatrix}$$

donc

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} \leftarrow \text{déterminant}$$

Dans le Cas général, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

on a

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

Définition: le polynôme Caractéristique est défini par :

$$f_A(x) = \det(A - x I_n) = \det(x I_n - A)$$

• pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

on a $f_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & x-4 \end{vmatrix}$

Exemple 1 : Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer $P_A(x)$.

Solution : par définition, on a

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} \quad C_1 \longrightarrow C_1 + C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 3-x & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)\cdot(1-x)$$

d'où

$$P_A(x) = (3-x)(1-x)$$

Exemple 2 : Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ Calculer } P_A(x).$$

Solution : Nous avons

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_1 \longrightarrow C_1 - C_2 \\ C_2 \longrightarrow C_2 - C_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ x & -x & 1 \\ 0 & x & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= x^2 \times \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= x^2 \left[-(-1+x-1) + (1-0) \right]$$

$$= x^2 (3-x)$$

d'où $\quad P_A(x) = x^2(3-x)$

Exemple 3 ; Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{Calculer } P_A(x).$$

2 Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Montrer que $P_A(x) = -(1+x)(2-x)^2$

3 On Considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

prouver que $P_A(x) = (3-x)^2(5-x)$.

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice Carrée. Les **valeurs propres** de A sont les racines de son polynôme Caractéristique.

- Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Sont} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3, \end{cases}$$

Car $P_A(x) = (3-x)(1-x)$.

Solution : par définition, on écrit

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 2 & -1 \\ 2 & 7-x & -2 \\ -1 & -2 & 4-x \end{vmatrix} \qquad C_1 \longrightarrow C_1 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -1 \\ 0 & 7-x & -2 \\ 3-x & -2 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7-x & -2 \\ 1 & -2 & 4-x \end{vmatrix} \qquad C_2 \longrightarrow 2C_3 + C_2$$

$$= (3-x) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3-x & -2 \\ 1 & 2(3-x) & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)^2 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4-x \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (3-x)^2 \left[4-x+4-(0-1) \right] = (3-x)^2(9-x)$$

d'où $P_A(x) = (3-x)^2(9-x)$.

Exemple 4 : Trouver le polynôme Caractéristique de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solution : Nous avons

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_1 \to C_1 - C_2 \\ C_2 \to C_2 - C_3 \\ C_3 \to C_3 - C_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 & 1 \\ -(3-x) & 3-x & 0 & 1 \\ 0 & -(3-x) & 3-x & 1 \\ 0 & 0 & -(3-x) & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)^3 \times \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + & - \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4-x \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (3-x)^3 \times \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4-x \end{vmatrix} \end{array} - \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{array} \right\}$$

$$= (3-x)^3 \cdot \left[4 - x + 1 + 1 - (-1) \right]$$

$$= (3-x)^3 (7-x)$$

d'où $\quad P_A(x) = (3-x)^3 (7-x).$

Devoir :

1 Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{bmatrix}$$

prouver que

$$P_A(x) = (1-x)^2 (-2-x).$$

- Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sont} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \leftarrow \text{double} \\ \lambda_2 = 3 & \leftarrow \text{simple} \end{cases}$$

Car $P_A(x) = x^2(3-x)$

- Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{sont} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 9 & \leftarrow \text{simple} \\ \lambda_2 = 3 & \leftarrow \text{double} \end{cases}$$

Car $P_A(x) = (3-x)^2(9-x)$.

- Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

sont $\lambda_1 = 7$ (simple) et $\lambda_2 = 3$ (triple)

Définition (Valeurs et Vecteurs propres)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Le sous-espace :

$$E_\lambda = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \,/\, Av = \lambda v \right\}$$

est appelé **sous-espace propre** de A associé à λ.

Exemple 1 : Calculer les valeurs et les vecteurs de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solution :

Comme $P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix}$

Donc, les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

• Calculons les sous-espaces propres E_{λ_1}, E_{λ_2} :

$\boxed{*}$ Le calcul de E_{λ_1} :

$$E_{\lambda_1} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_1 y \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{array}{l} x + y = x \\ 2y = y \end{array} \right\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$$
$$= \{(x,0) / x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,0) / x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathrm{Vect}\{(1,0)\}$$

D'où $v_1 = (1,0)$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda_1 = 1$.

$\boxed{*}$ Le Calcul de E_{λ_2} :

$$E_{\lambda_2} = \{v \in \mathbb{R}^2 / Av = \lambda_2 . v\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{matrix} x + 2y = 2x \\ 2y = 2y \end{matrix}\right\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$$
$$= \{(x,x) / x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) / x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathrm{Vect}\{(1,1)\}$$

D'où $v_2 = (1,1)$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda_2 = 2$.

Exemple 2 : Calculer les vecteurs propres de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On sait que $P_A(x) = x^2(3-x)$.
Donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ (double) et $\lambda_2 = 3$ (simple).

- Calculons E_{λ_1} :

$$E_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z=0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z = -x-y \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,-x-y) \;/\; x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \;/\; x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ (1,0,-1), (0,1,-1) \right\}$$

Donc $\begin{cases} v_1 = (1,0,-1) \\ v_2 = (0,1,-1) \end{cases}$

sont des vecteurs propres de A associés à $\lambda_1 = 0$.

• Calculons E_{λ_2} :

$$E_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} x+y+z = 3x \\ x+y+z = 3y \\ x+y+z = 3z \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y = z \right\}$$

$$= \left\{ (x,x,x) \,/\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x(1,1,1) \,/\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ (1,1,1) \right\}.$$

D'où $v = (1,1,1)$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda_2 = 3$.

Devoir. Vérifier que les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

sont $v_1 = (1,1,1,1) \longrightarrow \lambda_1 = 7$ (simple)

$$\left\{ \begin{array}{l} v_2 = (1,0,0,-1) \\ v_3 = (0,1,0,-1) \\ v_4 = (0,0,1,-1) \end{array} \right. \longrightarrow \lambda_2 = 3 \text{ (triple)}.$$

Le Calcul de A^{-1} par la méthode des Cofacteurs :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^{t}\mathrm{Com}(A)}$$

- $\mathrm{Com}(A) \equiv$ La Comatrice de A

Exemple 1 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculer A^{-1}.

Nous avons :

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, \text{ où}$$

$$\begin{cases} C_{11} = 4 \\ C_{12} = -3 \\ C_{21} = -2 \\ C_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Com}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc ${}^{t}\mathrm{Com}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

• $\det(A) = 4 - 6 = -2 \neq 0.$

D'où
$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Rappel :

$$\boxed{A^{-1} \text{ existe} \iff \det(A) \neq 0}$$

Vérification :
$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de même, on a
$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où
$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_2$$

Exemple 2 : On Considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculer A^{-1} par la méthode des **Cofacteurs**.

Solution : Nous avons

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, {}^{t}\mathrm{Com}(A)$$

avec

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}, \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Comatrice de A

où A_{ij} est la matrice **extraite** de A en supprimant La $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

par exemple,

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

D'où

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{vmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

D'après le Calcul, on obtient

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{bmatrix} -11 & -5 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 27 & 13 & -17 \end{bmatrix}$$

par suite

$${}^{t}\mathrm{Com}(A) = \begin{bmatrix} -11 & -1 & 27 \\ -5 & -1 & 13 \\ 7 & 1 & -17 \end{bmatrix}$$

- Calculons $\det(A)$:

$$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= 2\left[-3-8\right] - 5\left[9-4\right] + 7\left[6+1\right]$$

$$= -22 - 25 + 49 = 2 \neq 0.$$

d'où $\boxed{\det(A) = 2}$

Finalement, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^{t}\mathrm{Com}(A) = \begin{bmatrix} \frac{-11}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{27}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{13}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-17}{2} \end{bmatrix}.$$

Théorème de Cayley-Hamilton

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P_A(x)$ son polynôme Caractéristique, i.e,

$$P_A(x) = \det(A - x I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

d'après le Calcul, on a

$$P_A(x) = x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

(*) <u>Théorème de Cayley-Hamilton</u> : $P_A(A) = 0$

$0 \equiv$ La matrice nulle.

<u>Exemple</u> : on considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} = (1-x)(4-x) - 6$$
$$= x^2 - 5x - 2$$

d'où $P_A(x) = x^2 - 5x - 2$.

Calculons $A^2 - 5A - 2I$:

$$A^2 - 5A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ D'où $P_A(A) = 0$.

Remarque : Soit A une matrice carrée et soit $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ un polynôme. Alors

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m, \quad \text{où}$$

matrice carrée

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

• Le calcul de A^{-1} par la méthode de Cayley-Hamilton :

Supposons que $P_A(x) = x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$

avec $c_0 \neq 0$.

d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$P_A(A) = A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_2 A^2 + c_1 A + c_0 I = 0$$

$$\Rightarrow A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_2 A^2 + c_1 A = - c_0 I$$

$$\Rightarrow A \left(A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \cdots + c_2 A + c_1 I \right) = - c_0 I$$

$$\Rightarrow A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \cdots + c_2 A + c_1 I = - c_0 A^{-1},$$

car $A^{-1} I = I A^{-1} = A^{-1}$.

d'où

$$A^{-1} = \frac{-1}{c_0} \left[A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \cdots + c_2 A + c_1 I \right]$$

<u>Exemple</u> : Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

D'après le Calcul, on a $P_A(x) = x^2 - 5x - 2$.

Comme $P_A(A) = 0$

$$\Rightarrow A^2 - 5A - 2I = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 5A = 2I$$

$$\Rightarrow A(A - 5I) = 2I, \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A - 5I = 2A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\left[A - 5I \right]$$

on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Devoir : Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Calculer A^{-1} par la méthode de Cayley - Hamilton.

⊛ Systèmes Linéaires :

on Considère le système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \cdots (S)$$

On peut écrire le système (S) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdots\cdots (S')$$

$$A \quad X = b$$

Exemple : Soit le système

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases} \cdots\cdots (S)$$

Sous la forme matricielle, on trouve

$$(S') \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = b$$

Méthode de A^{-1} :

$$A \cdot X = b \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot b}$$

Exemple : Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \cdots\cdots (S)$$

Solution : Nous avons

$$(S) \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{b}$$

d'où $X = A^{-1} b$, avec $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

c'est-à-dire

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

donc $x = -3$, $y = 2$.

Méthode de Cramman :

Soit le système

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b} \quad \dots\dots (S)$$

Supposons que $\det(A) \neq 0$

(i.e si $\det(A) \neq 0$, on dit que le système (S') est de Cramman).

La solution est donnée par :

$\forall\, i = 1, 2, \dots, n$:

La colonne i

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

<u>Exemple</u> : Soit le système

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \quad \dots \quad (S)$$

i.e
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{b}$$

Comme $\det(A) = -2 \neq 0$. Donc le système (S') est de Cramman.

La solution est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Devoir : Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 3y + z = 2 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \quad \dots\dots (S')$$

par la méthode de Cramman.

<u>Solution</u> : La matrice du système (S') est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

• Calculons le déterminant de la matrice A

$$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (3-2) = 1 \neq 0.$$

Comme $\det(A) \neq 0$, alors le système (S') est de Cramman. La solution (x, y, z) est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{6}{1} = 6,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{5}{1} = 5.$$

Donc la solution du système (S') est

$$(x, y, z) = (6, -1, 5).$$

* Exercice avec Solution :

On Considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vérifier que $A^3 = 5\mathrm{I}$, puis, en déduire A^{-1}.

Solution : D'après le Calcul, on a

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & & 5 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 5 \cdot \mathrm{I} = 5\, \mathrm{I}_3$$

Ceci implique $A^3 = 5\mathrm{I}$

Donc $A^2 = 5 A^{-1}$, i.e $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{5} A^2}$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice avec Solution :

A l'aide du Théorème de Cayley-Hamilton déterminer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution :

① Calculons le polynôme Caractéristique de la matrice A :

$$P_A(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 0 & 3-x & 1 \\ 0 & 2 & 1-x \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (1-x)\left[(3-x)(1-x)-2\right] - \left[0\right]$$

$$= (1-x)\left[x^2-4x+1\right]$$

$$= -x^3+5x^2-5x+1.$$

Comme $P_A(A) = 0$ (Théorème de Cayley-Hamilton),

alors

$$-A^3 + 5A^2 - 5A + I = 0$$

$$\Rightarrow -A^3 + 5A^2 - 5A = -I$$

$$\Rightarrow A^3 - 5A^2 + 5A = I$$

$$\Rightarrow A\left[A^2 - 5A + 5I\right] = I$$

$$\Rightarrow \boxed{A^2 - 5A + 5I = A^{-1}}$$

D'après le Calcul, on obtient

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 11 & 4 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le Calcul de A^n ; où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exemple : Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer A^n ; où $n \geq 0$.

Solution :

1 Calculons le polynôme Caractéristique $P_A(x)$:

par définition, on a

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix} \quad L_1 \to L_1 + L_2$$

$$= \begin{vmatrix} 4-x & 4-x \\ 3 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (4-x) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (4-x) \times [2-x-3] = -(1+x)(4-x)$$

$$= (x-4)(x+1).$$

$\boxed{2}$ Calculons les valeurs et les vecteurs propres de A.

- Comme $P_A(x) = (x-4)(x+1)$

donc les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

Les racines de $P_A(x)$.

- Le calcul de E_{λ_1} :

par définition, on a

$$E_{\lambda_1} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{matrix} x + 2y = -x \\ 3x + 2y = -y \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = -x \right\}$$

$$= \left\{ (x,-x) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x(1,-1) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Vect}\left\{ (1,-1) \right\}$$

Donc $v_1 = (1,-1)$ est un vecteur propre associé à $\lambda_1 = -1$.

- Le Calcul de E_{λ_2} :

$$E_{\lambda_2} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle/\; \begin{array}{l} x + 2y = 4x \\ 3x + 2y = 4y \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y = \frac{3}{2} x \right\}$$

$$= \left\{ \left(x, \frac{3x}{2}\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x\left(1, \frac{3}{2}\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \left(1, \frac{3}{2}\right) \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ (2,3) \right\} \; ; \text{ car } \mathrm{Vect}\{v\} = \mathrm{Vect}\{\alpha v\}.$$

Donc $v_2 = (2,3)$ est un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 4$.

$\boxed{3}$ posons

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

v_1 v_2

- Calculons P^{-1} :

on a $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)} \cdot {}^{t}\mathrm{Com}(P)$

C'est-à-dire

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Calculons $P^{-1}AP$:

On a

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$= D \equiv$ Diagonale

قُطرية

Comme $P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$

$\Rightarrow A^2 = \underline{PDP^{-1}}\,\underline{PDP^{-1}} = PD^2P^{-1}$

$\Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$.

où
$$D^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$D^3 = D^2 \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{bmatrix}$$

Donc
$$D^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix}$$

Finalement, on trouve.

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^n & 2 \cdot 4^n \\ -(-1)^n & 3 \cdot 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(-1)^n + 2 \cdot 4^n}{5} & \frac{2 \cdot 4^n - 2(-1)^n}{5} \\ \frac{3[4^n - (-1)^n]}{5} & \frac{2(-1)^n + 3 \cdot 4^n}{5} \end{bmatrix}$$

Applications linéaires et matrices

Exemple 1 Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (a_{11}x + a_{21}y, a_{12}x + a_{22}y),$$

où $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est linéaire
2. Trouver la matrice de f dans la base Canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solution : 1. clair

2. on sait que $\mathcal{B} = \{ \underset{e_1}{(1,0)}, \underset{e_2}{(0,1)} \}$

La base Canonique de $\mathbb{R}^2$

- $f(e_1) = (a_{11}, a_{12})$
$$= a_{11}e_1 + a_{12}e_2$$

- $f(e_2) = (a_{21}, a_{22})$
$$= a_{21}e_1 + a_{22}e_2$$

Donc

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Exemple 2 : Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (7x-y, x+2y-z, 2z)$$

La matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemple 3 : Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (7x-y, x+2y-z)$$

La matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemple 4 : Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (5x-3y+2z, 6x-4y+4z, 4x-4y+5z)$$

La matrice de f dans la base Canonique est donnée par :

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemple 5 : Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Trouver l'application linéaire associée à A

Solution : on a

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (2x - y + z, -x + 2y, 3x + 4y + z)$$

Exemple 6 : Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (x, y, z)$$

on a $\mathcal{M}_f(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$

Exemple 7 : on sait

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\{1, x, x^2\}$$
$$= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,/\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

= L'ensemble de polynômes de degré ≤ 2.

Soit $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$

Une application définie par :

$$f(P) = P + (1-x) P'$$

1 Montrer que f est linéaire

Rép :

- Soient $P, \varphi \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$f(P+\varphi) = (P+\varphi) + (1-x)(P+\varphi)'$$
$$= (P+\varphi) + (1-x)(P'+\varphi')$$
$$= P + (1-x)P' + \varphi + (1-x)\varphi'$$
$$= f(P) + f(\varphi).$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$, De même, on a

$$f(\lambda P) = (\lambda P) + (1-x)(\lambda P)'$$
$$= (\lambda P) + (1-x)\lambda P'$$
$$= \lambda [P + (1-x)P']$$
$$= \lambda f(P).$$ D'où f est linéaire.

② Déterminer la matrice $\mathcal{M}_f(\mathcal{B})$ associée à f par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

Rappel : $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\} \longrightarrow$ b.c

On calcule donc $f(1)$, $f(x)$, $f(x^2)$, puis on détermine leurs coordonnées dans la base $\{1, x, x^2\}$.

- $f(1) = 1 + (1-x)\cdot 0 = 1 = 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$
- $f(x) = x + (1-x)\cdot 1 = 1 = 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$
- $f(x^2) = x^2 + (1-x)(2x) = 2x - x^2$

$$= 0 + 2x - x^2$$

par suite,

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

③ Montrer que $\mathcal{B}' = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Rép : Comme $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, alors il suffit de montrer que les vecteurs $1, 1+x, (1+x)^2$ sont libres.

- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda_1 \times 1 + \lambda_2 (1+x) + \lambda_3 (1+x)^2 = 0$$

C'est le polynôme nul

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Donc les trois vecteurs $1, 1+x, (1+x)^2$ sont libres. Ceci signifie que la famille $\mathcal{B} = \{1, (1+x), (1+x)^2\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[x]$

④ Déterminer la matrice $\mathcal{M}(\mathcal{B}')$ associée à f par rapport à la base $\mathcal{B}'$

Rép : On calcule $f(1)$, $f(1+x)$, $f((1+x)^2)$ puis, on détermine leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}' = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$. En effet, on a

- $f(1) = 1 = 1 + 0\cdot(1+x) + 0\cdot(1+x)^2$
- $f(1+x) = 1+x + (1-x)\cdot 1 = 2$
  $= 2 + 0\cdot(1+x) + 0\cdot(1+x)^2$
- $f[(1+x)^2] = (1+x)^2 + (1-x)(1+x)\times 2$

$= \cdots = 3 + 2x - x^2$

$= \alpha + \beta(1+x) + \gamma(1+x)^2,$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont des scalaires à déterminer

On a

$$3 + 2x - x^2 = \alpha + \beta(1+x) + \gamma(1+x)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \beta + 2\gamma = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

D'où $\alpha = 0$, $\beta = 4$ et $\gamma = -1$.

C'est-à-dire

$$f((1+x)^2) = 3 + 2x - x^2$$
$$= 0 + 4(1+x) - (1+x)^2$$

Finalement, on obtient

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5 Trouver la matrice de passage P de la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ vers la base $\mathcal{B}' = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$

- $\mathcal{B}$ c'est l'ancienne base
- $\mathcal{B}'$ c'est la nouvelle base.

En effet, on a

- $1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$
- $1 + x = 1 + x + 0 \cdot x^2$
- $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

par suite

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C'est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

⑥ Calculer P^{-1}

Rép : on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t\mathrm{Com}(A)$$

où

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot {}^t\mathrm{Com}(P)$$

- Le Calcul de $\det(P)$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{1} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

- Le Calcul de Com (P).

$$\mathrm{Com}(P) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix},$$

où

$C_{11} = 1$, $C_{12} = 0$, $C_{13} = 0$

$C_{21} = -1$, $C_{22} = 1$, $C_{23} = 0$

$C_{31} = 1$, $C_{32} = -2$, $C_{33} = 1$

par suite,

$$\mathrm{Com}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{t}\mathrm{Com}(P) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\, {}^{t}\mathrm{Com}(P) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fin.

Dj - Bellaouar.