Université 08 Mai 45 Guelma,   2016/2017
Département de Mathématiques, $1^{ère}$ année L.M.D-Maths-Info.
Matière: Maths
Par l'enseignant: Bellaouar. Dj.

Formules Trigonométriques

`Les paroles s'envolent mais les écrits restent...`
`À cet effet ce travail.`

1. Relations Fondamentales

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$
- $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}, \quad \arctan p - \arctan q = \arctan \dfrac{p-q}{1+pq}, \quad \arctan p + \arctan q = \dfrac{\pi}{2}$
- $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} \end{cases}, \begin{cases} ch\theta = \dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} \\ sh\theta = \dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} \end{cases}$

2. Valeurs Remarquables

- $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}, \ \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
- $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$
- $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}, \ \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \ \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

3. Symétrie, Complément et Supplément

- $\cos(-x) = \cos x, \ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x, \ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x, \ \cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x, \ \sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

4. Formules de Transformations

- $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\cos(a+b) + \dfrac{1}{2}\cos(a-b)$
- $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\sin(a+b) + \dfrac{1}{2}\sin(a-b)$

- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a+b) - \frac{1}{2}\cos(a-b)$

- $\begin{cases} \sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos a - \cos b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right). \end{cases}$

5. Formules d'addition

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$

6. Fonction de l'arc double

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
- $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}.$

7. Expressions Rationnelles des $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$.

- $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \ \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}.$

8. Remarque très importante

Les formules de transformations des fonctions hyperboliques s'obtiennent en remplaçant $\cos x$ par chx et $\sin x$ par $ishx$ dans les formules précédente, avec $i^2 = -1$. Par exemple, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow ch^2x - sh^2x = 1$, ...Etc.