République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 1945-Guelma
Faculté Des Sciences Économiques, Commerciales Et Sciences De Gestion
T.C première année L.M.D

Premier chapitre: Rappels sur la théorie des ensembles

1^{er}−semestre 2020/2021. Présenté par Dr. Azzedine KHENICHE.

1 Rappels sur la théorie des ensembles

1.1. Éléments de logique

Le contenu de ce chapitre n'est pas un cours de logique. La logique a pour objet d'étudier les processus de la pensée, elle décrit ce qu'est un raisonnement valide et explique pourquoi un raisonnement donné est valide. Elle est sous-jacente à toute construction mathématique mais aussi à toute construction théorique. Il existe plusieurs forme de logique, logique du premier ordre , logique multivalente, différente forme de logique "floue". Nous présentons ici simplement quelque "élement" de logique du premier ordre qui est la forme de la logique la plus utilisée en mathématique.

1.1.1. Les deux différents types d'énoncés

Il y a en mathématique deux grandes catégories d'énoncés, les énoncés qui représentent ou désignent les objets étudiés et les énoncés qui affirment une propriété qu'ont (ou n'ont pas) les objets étudiés.

Exemple 1.1.
- *Omar, table, voiture*
- *L'ensemble des entiers naturels.*
- *Omar est un voleur*
- *La voiture est endommagée.*
- *L'application à valeur réelle de la variable réelle $f : x \to sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
- *Les fonctions polynômiales sont des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.*

Les énoncés 1 *et* 2 *désignent des objets. Les énoncés* $3, 4, 5et6$ *sont des affirmations.*

Concernant les énoncés désignant des objets, les concepts de vrai ou faux n'ont aucun sens, en revanche un énoncé qui est une affirmation peut être vrai ou faux, on dit qu'il admet une une valeur de vérité.

Exemple 1.2.
- *Dire ou écrire "la fonction sinus est fausse" ou "le lapin est vrai" sont des énoncés qui n'ont pas de sens.*
- *Les fonctions polynômiales sont des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$" est une affirmation fausse*

Exercice 1.1. *Parmi les énoncés suivants, lesquels ont un sens ? lesquels désignent un objet ? une affirmation ? lesquels admettent une valeur de vérité ?*

- *Une fourmi de dix-huit mètres ca n'existe pas!*
- *Une fourmi parlant français, parlant latin.*
- *Cette fourmi est fausse.*
- *Une vraie fourmi.*

1.1.2. Assertions et connecteurs logiques

Définition 1.1. *Une assertion est un énoncé mathématique (ou propriété) à laquelle on attribue l'une des deux valeurs logiques : le vrai (V) ou le faux (F)(valeurs booléennes). Autrement dit c'est la représentation d'une affirmation.*

Exemple 1.3.
- *"2 + 2 = 4" est une assertion vraie.*
- *"2 + 2 = 5" est une assertion fausse.*
- *"π est un nombre entier" est une assertion fausse.*
- *"Par un point hors d'une droite donnée du plan passe une et une seule droite parallèlle "*
  est une assertion vraie, c'est un des axiomes d'Euclide.

Un axiome ne se démontre pas, il est vrai a priori. C'est sur la collection des axiomes que repose l'ensemble de la théorie : Aprés s'être donné une liste d'axiome on applique des règles de déduction pour trouver de nouvelles assertions vraies. Ces nouvelles assertions sont appelées théorèmes, lemmes, ou corollaires. La distinctions entre ces trois types d'assertion est plutôt de nature culturelle voire émotionnelle, les théor'emes sont les assertions qui semblent les plus importantes, les lemmes sont des assertions préparatoires aux théorèmes, les corollaires sont des conséquences de théorèmes. Ce qu'on exige de la collection initiale d'axiome est qu'ils ne soient pas contradictoires . Les théorèmes, lemmes et corollaires sont accompagnés d'un texte appelé démonstration ce texte établit la véracité de l'énoncé.

Remarque 1.1. *Pour certaines assertions, on peut décider du caractère vrai ou faux (par exemple, on peut décider que l'assertion $x > 0$ est vraie), mais cela provoque parfois des contradictions. Par exemple, l'assertion "toute règle admet une exception" ne peut pas être vraie. Les deux possibilités sont consignées dans une table de vérité :*

P
V
F

1.1.3. Connecteurs logiques

Il existe cinq connecteurs logiques, à la base de tout raisonnement mathématique, dont nous allons faire la liste:

(i) Négation (*non*) : À toute assertion P, on peut associer une autre assertion, appelée négation de P et notée $(\neg P)$, qui prend les valeurs :

- Vrai si P est faux.
- faux si P est vrai.

P	$\neg P$
V	F
F	V

Par exemple, si P est : "l'entier n est pair", $(\neg P)$ devient : "l'entier n est impair".

(ii) Disjonction (*ou*) notée $\vee$: L'assertion $(P \vee Q)$ est vraie si l'une au moins des deux assertions P et Q est vraie.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(iii) Conjonction (*et*) notée $\wedge$: L'assertion $(P \wedge Q)$ est vraie si les deux assertions P et Q sont vraies.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(iv) Implication $(\Rightarrow)$: L'assertion $(P \Rightarrow Q)$ est vraie si l'assertion $(\neg P) ou (Q)$ est vraie.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(v) Équivalence $(\Leftrightarrow)$: L'assertion $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie si les deux assertions $(P \Rightarrow Q)$ et$(Q \Rightarrow P)$ est vraie.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque 1.2. *(i) $P \Rightarrow Q$ signifie que "Si P est (vraie), alors Q est (vraie)", ou encore "P est une condition suffisante pour Q", ou enfin "Q est une condition nécessaire pour P"*

(ii) $P \Leftrightarrow Q$ s'écrit aussi "P si et seulement si Q", ou encore "P est une condition nécessaire et suffisante pour Q"

(iii) Si P et Q sont simultanément fausses, alors $(P \Rightarrow Q)$ est vraie. Par exemple $((1 > 2) \Rightarrow (2 > 3))$ est une assertion vraie.

(iv) $P \Rightarrow Q$ n'a pas la même valeur logique que $Q \Rightarrow P$. Par exemple, pour $x \in \mathbb{R}, (x = 1 \Rightarrow x > 0)$ est une assertion vraie, mais $(x > 0 \Rightarrow x = 1)$ est une assertion fausse.

On peut résumer les différentes valeurs logiques prises par ces connecteurs logiques en fonction des valeurs logiques de P et Q dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Proposition 1.1. *(Propriétés des connecteurs logiques)*

(i) Si $(P \Rightarrow Q)$ est vraie et si $(Q \Rightarrow R)$ est vraie, alors $(P \Rightarrow R)$ est vraie.

(ii) $\neg(\neg P)$ a même valeur logique que P.

(iii) $\neg(P \wedge Q)$ a même valeur logique que $(\neg P) \vee (\neg Q)$

(iv) $\neg(P \vee Q)$ a même valeur logique que $(\neg P) \wedge (\neg Q)$

(v) $P \wedge (Q \vee R)$ a même valeur logique que $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(vi) $P \vee (Q \wedge R)$ a même valeur logique que $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Proof.

Toutes ces propriétés se retrouvent à l'aide de tables de vérité. Par exemple, pour (iii) on a :

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

$\square$

Ce tableau nous permet de constater que les valeurs logiques prises par la propriété $\neg(P \wedge Q)$ coïncident avec celles de la propriété $(\neg P) \vee (\neg Q)$. On pourra démontrer le reste de la même façon.

Remarque 1.3. *Il est essentiel de savoir formuler la négation d'une propriété P. En effet comme les valeurs logiques de la propriété P et de la propriété $\neg P$ sont inverses, il suffit de démontrer que $\neg P$ est vraie pour établir que P est fausse.*

Exercice 1.2. *(Contraposition)*
Montrer que l'assertion $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ est toujours vraie.

1.1.4. Quantificateurs

Définition 1.2. ***(prédicat)***
Soit E un ensemble. Pour un élément x de E, on note $P(x)$ une assertion dont la valeur logique dépend d'une variable notée x. $P(x)$ est appelé un prédicat. Par exemple, pour $E = \mathbb{R}$, le prédicat $P(x)$: "$x > 0$" est vrai pour la valeur $x = 1$, et faux pour la valeur $x = -1$.

Définition 1.3. ***(Quantificateurs)***

(i) On définit le quantificateur universel, noté $\forall$ (quelque soit) de la manière suivante :

$$\forall x \in E, P(x)$$

signifie que le prédicat $P(x)$ est vrai pour toute valeur de x prise dans E, ou encore :

$$\{x \in E \ / P(x) \ \ est \ \ vrai\} = E$$

(ii) On définit le quantificateur existentiel, noté $\exists$ (il existe) de la manière suivante :

$$\exists x \in E, P(x)$$

signifie que le prédicat $P(x)$ est vrai pour au moins une valeur de x prise dans E, ou encore :

$$\{x \in E \ / P(x) \ \ est \ \ vrai\} \neq \phi$$

Proposition 1.2. *On exprime la négation des quantificateurs de la manière suivante:*

(i) L'assertion $non(\exists x \in E, P(x))$ *est logiquement équivalente à* $(\forall x \in E, non\ P(x))$.

(ii) L'assertion $non(\forall x \in E, P(x))$ *est logiquement équivalente à* $(\exists x \in E, non\ P(x))$.

Exemple 1.4.

$$\begin{aligned} non(\forall x \in E, [\exists y \in F, (\forall z \in G, P(x,y,z))]) &\Leftrightarrow \exists x \in E, non[\exists y \in F, (\forall z \in G, P(x,y,z))]) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E, \forall y \in F, non[(\forall z \in G, P(x,y,z))]) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E, \forall y \in F, \exists z \in G, non\ P(x,y,z)\,. \end{aligned}$$

Proposition 1.3. *On peut inverser deux quantificateurs de même nature :*

(i) $(\exists x \in E, \exists y \in F / P(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y \in F, \exists x \in E / P(x,y))$

(ii) $(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x,y))$

(ii) $(\forall x \in E, \exists y \in F, P(x;y))$ *n'est en général pas équivalent à* $(\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y))$

Exemple 1.5.

(i) Si $E = \mathbb{R}_-^*$ *et* $F = \mathbb{R}_+^*$ *alors on a* $(\forall x < 0, \forall y > 0 : xy < 0)$, *ce qui équivaut à* $(\forall y > 0, \forall x < 0 : xy < 0)$.

(ii) Si $E = F = \mathbb{R}_+^*$, *alors l'assertion* $(\forall x > 0, \exists y > 0 : xy = 1)$ *est vraie. En effet, pour tout* x *réel strictement positif, il existe* $y = \frac{1}{x} > 0$ *tel que* $xy = 1$. *En revanche, l'assertion* $(\exists y > 0, \forall x > 0 : xy = 1)$ *est fausse. On peut le prouver à l'aide de la remarque 1.3. La négation de cette assertion est :* $(\forall y > 0; \exists x > 0; xy \neq 1)$.
Cette nouvelle assertion est vraie car pour y *réel strictement positif quelconque, il existe* $x = \frac{2}{y} > 0$ *tel que* $xy = 2 \neq 1$.