République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 1945-Guelma
Faculté Des Sciences Économiques, Commerciales Et Sciences De Gestion
T.C première année L.M.D

Deuxième chapitre : suites et séries numériques, 1^{er}−semestre 2020/2021. Présenté par Dr. Azzedine KHENICHE.

1 Deuxième chapitre : suites et séries numériques

1.1. Suites numériques

L'étude des suites numériques a pour objet la comprhension de l'évolution de séquences de nombres (réels, complexes...). Ceci permet de modéliser de nombreux phénomènes de la vie quotidienne. Supposons par exemple que l'on place une somme S à un taux annuel de 10%. Si S_n représente la somme que l'on obtiendra aprés n années, on a:

$$S_0 = S, S_1 = S \times (1,1), ..., S_n = S \times (1,1)^n.$$

Au bout de $n = 10$ ans, on possèdera donc $S_{10} = S \times (1,1)^{10} \approx S \times 2,59$: la somme de départ avec les intérêts cumulés.

1.1.1. Généralités

Définition 1.1.

- *Une suite est une application* $U : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on note* $U(n)$ *par* U_n *(se lit "U indice n") et on l'appelle* n*-ème terme ou terme général de la suite.*

La suite est notée plus souvent $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (U_n). Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(U_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple 1.1. *(Modes de génération d'une suite)*

- *Suites définies par une formule explicite: On peut définir une suite numérique* (U_n) *à l'aide d'une fonction* f *définie sur* $[0, +\infty[$ *en posant, pour tout entier* n, $U_n = f(n)$. *On peut calculer directement, à partir de* n, *le terme de rang* n. *par exemple:*

  – *La suite* $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ *est la suite de termes:* $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ...$
  – *La suite* $(-1)^n_{n\geq 0}$ *est la suite qui alterne:* $+1, -1, +1, -1, ...$
  – *La suite* $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$ *est la suite de termes:* $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...$

- *Suites définies par récurrence: dans cas, un terme de la suite s'écrit en fonction du ou des précédents), par exemple:*

  - *La suite définie par la donnée de U_0 et une relation de recurence $U_{n+1} = U_n + 2$, U_1 se déduit de U_0, U_2 se déduit de U_1, U_3 de U_2, ,U_{n+1} de U_n,...*
  - *La suite $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (suite de Fibonacci). Les premiers termes sont $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ Chaque terme est la somme des deux précédents.*

Définition 1.2. ***(Suite majorée, minorée, bornée)***

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée si* $\exists M \in \mathbb{R}/\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq M$.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée si* $\exists m \in \mathbb{R}/\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq m$.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire : si*

$$\exists M \in \mathbb{R}/\forall n \in \mathbb{N} : |U_n| \leq M$$

.

Définition 1.3. ***(Suite croissante, décroissante)***

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante si* $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq U_{n+1}$.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante si* $\forall n \in \mathbb{N} : U_n < U_{n+1}$.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} \leq U_n$.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} < U_n$.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone si elle est croissante ou décroissante.*
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Remarque 1.1.

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$

Exemple 1.2.

- *La suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$, n'est ni croissante ni décroissante. Elle est majorée par $\frac{1}{2}$(borne atteinte en $n = 2$), minorée par -1 (borne atteinte en $n = 1$).*
- *La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est une suite strictement décroissante. Elle est majorée par 1 (borne atteinte pour $n = 1$), elle est minorée par 0 mais cette valeur n'est jamais atteinte.*

Exercice 1.1.

1. *La suite $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? Est-elle bornée ?.*
2. *La suite $\frac{n\sin(n!)}{1+n^2}_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?.*
3. *Réécrire les phrases suivantes en une phrase mathématique. Écrire ensuite la négation mathématique de chacune des phrases.*
   (a) *La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 5.*
   (b) *La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
   (c) *La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.*
   (d) *La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas strictement croissante.*
4. *Est-il vrai qu'une suite croissante est minorée ? Majorée?.*
5. *Soit $x > 0$ un réel. Montrer que la suite $(\frac{x^n}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.*

1.1.2. Limite finie, limite infinie

Définition 1.4.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$ alors $|U_n - l| \leq \varepsilon$:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |U_n - l| \leq \varepsilon$$

On dit aussi que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l. Autrement dit : U_n est proche d'aussi prés que l'on veut de l à partir d'un certain rang.

Définition 1.5.

(i) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow U_n \geq A$$

(ii) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow U_n \leq -A$$

Remarque 1.2.

(i) On note $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$

(ii) On raccourcit souvent la phrase logique en:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |U_n - l| \leq \varepsilon$$

Noter que N dépend de ε et qu'on ne peut pas échanger l'ordre du "pour tout" et du "il existe".

(iii) L'inégalité $|U_n - l| \leq \varepsilon$ signifie $l - \varepsilon \leq U_n \leq l + \varepsilon$ On aurait aussi pu définir la limite par la phrase:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$$

où l'on a remplacé la dernière inégalité large par une inégalité stricte.

Définition 1.6.

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite).

Proposition 1.1. ***(Unicité de la limite)***
Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Proof. Exercice. □

Proposition 1.2. ***(Propriétés des limites)***

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (U_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |U_n - l| = 0$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |U_n| = |l|$

Proof.

Cela résulte directement de la définition. □

Théoreme 1.1.

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes.*

(i) Toute suite croissante et majorée est convergente.

(ii) Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Proof. Exercice □

Proposition 1.3. ***(Opérations sur les limites)***

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes.*

(i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$ *où* $l \in \mathbb{R}$, *alors pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda U_n = \lambda l$

(ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$ *et Si* $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = l'$ *où* $l, l' \in \mathbb{R}$, *alors:*

$$\lim_{n\to\infty} (U_n + V_n) = l + l'$$

et

$$\lim_{n\to\infty} (U_n \times V_n) = l \times l'$$

(iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$ *où* $l \in \mathbb{R}^*$, *alors:* $U_n \neq 0$ *pour* n *assez grand et* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{U_n} = \dfrac{1}{l}$

Proof. Exercice □

Exemple 1.3.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$ *avec* $l \neq \pm 1$, *alors:*

$$\lim_{n\to\infty} U_n(1 - 3U_n) - \frac{1}{U_n^2 - 1} = l(1 - 3l) - \frac{1}{l^2 - 1}$$

Proposition 1.4. ***(Opérations sur les limites infinies)***

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que* $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = +\infty$.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{V_n} = 0.$

(ii) Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée alors*

$$\lim_{n\to\infty} (U_n + V_n) = +\infty$$

(iii) Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par un nombre* $\lambda > 0$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} (U_n \times V_n) = +\infty$$

(iv) Si $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$. *et* $U_n > 0$ *pour* n *assez grand alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{U_n} = +\infty$$

Proof. Exercice □

Exemple 1.4.

La suite $\sqrt{n}$ *tend vers* $+\infty$*, donc la suite* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *tend vers* 0.

Proposition 1.5. *Toute suite convergente est bornée.*

Proof. Exercice □

Proposition 1.6. *Si la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et* $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} (U_n \times V_n) = 0$$

Proof. Exercice □

Exercice

1.1.3. Formes indéterminées

Dans certaines situations, on ne peut rien dire à priori sur la limite, il faut faire une étude au cas par cas.

Exemple 1.5. *(i)* $+\infty - \infty$: *il faut faire l'étude en fonction de chaque suite pour déterminer* $\lim_{n\to\infty} (U_n + V_n)$ *comme le prouve les exemples suivants:*

- $\lim_{n\to\infty} (\exp n - \ln n) = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} (n - n^2) = -\infty$
- $\lim_{n\to\infty} ((n + \frac{1}{n}) - n) = 0$

(ii) $0 \times \infty$: *par exemple;*

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \times \exp n = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \ln n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times (n+1) = 1$

(iii) $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, ...$

1.1.4. Limite et inégalités

Proposition 1.7.

(i) *Soient* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes telles que* $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$*, alors:*
$$\lim_{n\to\infty} U_n \leq \lim_{n\to\infty} V_n$$

(ii) *Soient* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que* $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$*, et* $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty$ *alors:*
$$\lim_{n\to\infty} V_n = +\infty$$

(iii) ***Théorème des "gendarmes":*** *Si* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont trois suites telles que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n \leq W_n$$
, et $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} W_n = l$*, alors:*
$$\lim_{n\to\infty} V_n = l$$

Proof. Exercice. □

Exemple 1.6. *Soit la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $U_n = \frac{2n+(-1)^n}{n+1}$*. On considère alors les suites* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*
$$V_n = \frac{2n-1}{n+1}, W_n = \frac{2n+1}{n+1}.$$
Alors, pour tout entier naturel n,
$$V_n \leq U_n \leq W_n$$
De plus,
$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} W_n = 2$$
donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 2$*.*

1.1.5. Suites adjacentes

Définition 1.7.

On dit que deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées:*

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante;*

- *Pour tout entier naturel* n, $U_n \leq V_n$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}(U_n - V_n) = 0$

Exemple 1.7. *Les suites* $U_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ *et* $V_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ *sont des suites adjacentes.*

1.1.6. Suites arithmétiques

Définition 1.8.

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique s'il existe un réel* r *tel que pour tout entier naturel* n *, on ait :* $U_{n+1} = U_n + r$.
Il revient au même de dire que pour tout entier naturel n, $U_n = U_0 + nr$, *c'est-à-dire que* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite affine .*
r *est appelé raison de la suite arithmétique.*

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r , on a :

$$U_n = U_p + (n-p)r.$$

Exemple 1.8.
- *la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $V_0 = 4$ *et* $V_{n+1} = V_n + 3$ *est arithmétique de premier terme* 4 *et de raison* 3.
- *La suite des naturels est arithmétique de premier terme* 0 *et de raison* 1.
- *La suite des naturels impairs est arithmétique de premier terme* 1 *et de raison* 2

•**Somme des termes consécutifs**:
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la demi-somme des extrêmes.

$$S = nombre\ de\ termes\ \times \frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2}$$

Exemple 1.9.
- $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $S = U_0 + U_1 + U_3 + ... + U_n = (n+1) \times \frac{U_0+U_n}{2}$
- $S = U_p + U_{p+1} + ... + U_n = (n-p+1) \times \frac{U_p+U_n}{2}$

1.1.7. Suites géométriques

Définition 1.9.

Une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique s'il existe un réel* q *tel que pour tout entier naturel* n *, on ait :* $V_{n+1} = q \times V_n$

Il revient au même de dire que pour tout entier naturel n, $V_n = q^n \times V_0$, *c'est-à-dire que* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite exponentielle .*
q *est appelé raison de la suite géométrique.*

Si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q , on a :

$$V_n = V_p \times q^{n-p}$$

Exemple 1.10.
- *la suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $V_0 = -3$ *et* $V_{n+1} = 5 \times V_n$ *est géométrique de premier terme* 3 *et de raison* 5.
- *La suite des puissances successives de* (2) *est géométrique de premier terme* 1 *et de raison* 2

•**Somme des termes consécutifs**:
La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q?1 est égale à:

$$S = terme\ initial\ \times \frac{1 - q^{nombre\ de\ termes}}{1 - q}$$

Exemple 1.11. *pour tout entier naturel* n,

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \begin{cases} 1 & , \text{ si } q = 0 \\ n+1 & , \text{ si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & , \text{ si } non \end{cases} .$$

Exemple 1.12.
- $S = V_0 + V_1 + V_3 + ... + V_n = V_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $S = V_p + V_{p+1} + ... + V_n = V_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$