توزيع المعاينة

أولا: مفهوم توزيع المعاينة: هو توزيع احتمالي لجميع القيم الممكنة لإحصاءة ما في كل العينات العشوائية الممكنة والتي لها نفس الحجم وسحبت بنفس الطريقة بمعنى أنه لو افترضنا أنه لدينا مجتمع يتبع توزيعا معينا وأننا بصدد سحب عينة حجمها n، نجد أنفسنا أمام إمكانية سحب عدد كبير من العينات، فإذا حسبنا أحد المقاييس الإحصائية مثلا الوسط الحسابي من جميع العينات التي يمكن سحبها من المجتمع سنجد أمامنا عدد كبير من القيم لنفس المقياس والتي في أغلب الأحيان تكون مختلفة، ولذا سننظر لهذا المقياس على أنه متغير عشوائي يتبع توزيعا معينا يسمى توزيع المعاينة، وهكذا بالنسبة لبقية المقاييس الإحصائية.

ثانيا: عدد العينات المسحوبة من المجتمع: لإيجاد عدد العينات الممكنة والمسحوبة من مجتمع حجمه N هناك حالتين:

حالة السحب مع الإرجاع	حالة السحب دون إرجاع	
	حالة السحب دون الإرجاع والترتيب غير مهم	حالة السحب دون الإرجاع والترتيب مهم
N^n	$C_N^n = \dfrac{N!}{(N-n)!\,n!}$	$P_N^n = \dfrac{N!}{(N-n)!}$

ملاحظة: في حالة السحب دون إرجاع ولم يتم ذكر نوعية الترتيب، فإننا نعتبر الترتيب غير مهم.

ثالثا: توزيع المعاينة للمتوسطات:

نفرض أنه لدينا مجتمع مفرداته هي: $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$، ونفرض أنن سحبنا من هذا المجتمع عينة حجمها n وحسبنا وسطها الحسابي فوجدناه $\bar{X}_1$، ثم سحبنا عينة أخرى بنفس الطريقة ووجدنا وسطها الحسابي $\bar{X}_2$ وهكذا بالنسبة لكل العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع

سنجد أننا سنحصل على سلسلة جديدة هي $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_n$ وهي غالبا تختلف عن بعضها وتكون مجتمعا جديدا له توزيع احتمالي له متوسط وانحراف معياري.

I. خصائص توزيع المعاينة:

أ- متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات

إذا كانت X متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما و $\bar{X}$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع فإن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة تكتب كمايلي:

$$\boxed{E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu}$$

ب- تباين توزيع المعاينة للمتوسطات

إذا كانت X متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما و $\bar{X}$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع فإن تباين توزيع المعاينة للمتوسطات يكتب كمايلي:

حالة السحب دون إرجاع والمجتمع محدود	حالة السحب مع الإرجاع
$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

تسمى النسبة $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ معامل التصحيح ويستخدم في حالة المجتمعات المحدودة بشرط أن يكون:

$$\boxed{\frac{n}{N} \geq 0.05}$$

II. توزيع المعاينة للوسط الحسابي من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي:

1- تباين المجتمع σ^2 معلوم:

إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي μ وبتباين σ^2 وسحبنا منه كل العينات العشوائية البسيطة ذات الحجم n، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ ستتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي قدره $\mu_{\bar{X}} = \mu$ وتباين قدره $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ أي: $\bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2\right)$ وسيتوزع هذا المتغير توزيعا طبيعيا معياريا تبعا للإحصائية Z كمايلي:

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}}$$

حيث: $Z \sim N(0,1)$

ويجب الأخذ بعين الاعتبار نوعية السحب (مع الإرجاع أو دون إرجاع)

حالة السحب دون إرجاع والمجتمع محدود	حالة السحب مع الإرجاع
$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

ملاحظات:

1- يتم استخدام معامل التصحيح $\left(\frac{N-}{N-1}\right)$ في حالة توفر شرط استخدامه.

2- تقرأ القيم Z من الجدول الإحصائي كمايلي:

أ- إذا كانت Z موجبة والإشارة (أصغر من) تقرأ قيمتها مباشرة من الجدول:

$$P(Z < A) = F(A)$$

ب- إذا كانت Z سالبة والإشارة (أصغر من) تقرأ قيمتها مباشرة من الجدول:

$$P(Z < -A) = 1 - P(Z < A) = 1 - F(A)$$

ج- إذا كانت Z موجبة والإشارة (أكبر من) تقرأ قيمتها مباشرة من الجدول:

$$P(Z > A) = 1 - P(Z < A) = 1 - F(A)$$

2-تباين المجتمع مجهول: نميز هنا بين حالتين:

➢ **عندما يكون حجم العينة n≥30:**

نجد أن توزيع الوسط الحسابي للعينةهو: $\bar{X}\sim N\left(\mu_{\bar{X}},\frac{S^2}{n}\right)$ وسيتوزع هذا المتغير توزيعا طبيعيا معياريا تبعا للإحصائية Z كمايلي:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

حيث: $Z\sim N(0,1)$

ويجب الأخذ بعين الاعتبار نوعية السحب (مع الإرجاع أو دون إرجاع)

حالة السحب مع الإرجاع	حالة السحب دون إرجاع والمجتمع محدود
$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sqrt{\frac{S^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}}}=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$

➢ **عندما يكون حجم العينة n<30:**

يكون توزيع المعاينة الوسط الحسابي كمايلي:

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

حالة السحب مع الإرجاع	حالة السحب دون إرجاع والمجتمع محدود
$T=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$T=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sqrt{\frac{S^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}}}=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$

III. توزيع المعاينة للوسط الحسابي من مجتمع لا يتبع التوزيع الطبيعي:

عندما نجهل نوع التوزيع الذي سحبت منه العينة نطبق نظرية النهاية المركزية والتي نعتبر من خلالها أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة يتبع توزيعا قريبا من التوزيع الطبيعي بشرط أن يكون حجم العينة (n≥30) وكلما زاد حجم العينة كلما اقترب توزيع المعاينة للوسط الحسابي أكثر من التوزيع الطبيعي.

وبالتالي إذا كان لدينا مجتمع توزيعه لا يتبع التوزيع الطبيعي (مجهول) ووسطه الحسابي μ وبتباين σ^2 وكانت (n≥30) فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة سيتوزع توزيعا قريبا من التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره $\mu_{\bar{X}}=\mu$ وتباين قدره $\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$ حيث:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

ويجب الأخذ بعين الاعتبار نوعية السحب (مع الإرجاع أو دون إرجاع) كما في الجدول أعلاه.

IV. توزيع المعاينة للنسب:

غالبا ما تستخدم نسب العينات في المجالات الاقتصادية، فلنعتبر كل العينات الممكنة التي حجمها n وسحبت من نفس المجتمع، ونحدد لكل عينة الإحصائية الخاصة بها وهي نسبة النجاح $\bar{P}$، فإن توزيع المعاينة للنسب هو التوزيع الاحتمالي لكل القيم الممكنة لنسبة العينة $\bar{P}$ ويحمل الخصائص التالية:

1. **الأمل الرياضي:** $\mu_{\bar{P}} = E(\bar{P}) = P$

2. **الانحراف المعياري:**

حالة السحب مع الإرجاع	حالة السحب دون إرجاع والمجتمع محدود
$\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{P.q}{n}}$	$\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{P.q}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}$

إذا كان توزيع المعاينة لـ $(\bar{P})$ قريب من التوزيع الطبيعي بوسط $\mu_{\bar{P}}$ وانحراف معياري $\sigma_{\bar{P}}$ فإن القيمة المعيارية تعطى بالعلاقة:

$$\boxed{Z = \frac{\bar{P}-P}{\sigma_{\bar{P}}}}$$

ملاحظة هامة: - يتم استخدام معامل التصحيح $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ في حالة توفر شرط استخدامه ($n \geq 0.05N$)

- تتمثل شروط تقريب توزيع ذو الحدين إلى التوزيع الطبيعي في:

1- $n \geq 30$

2- $np \geq 5$

3- $nq \geq 5$

V. توزيع المعاينة للفروق والمجاميع:

لنفترض أنه لدينا مجتمعين، نسحب من المجتمع الأول N_1 عينة حجمها n_1 ، ونسحب من المجتمع الثاني N_2 عينة حجمها n_2 مستقلة، حيث:

$$X_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$$
$$X_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$$

1- **توزيع المعاينة للفروق:** يعرف توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين كالتالي:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$$

ويكون انحرافه المعياري:

أ- المجتمع غير منته أو السحب مع الإعادة:

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ب- المجتمع منته و السحب دون إرجاع:

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}_1}+\sigma^2_{\bar{X}_2}}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\frac{N_2-n_2}{N_2-1}}$$

ويكون توزيع المعاينة يتبع التوزيع الطبيعي:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\sim N\left((\mu_{\bar{X}_1}-\mu_{\bar{X}_2}),\ \sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)$$

وتعطى القيمة المعيارية $\boldsymbol{Z}$ بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\boldsymbol{Z}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}_1}+\sigma^2_{\bar{X}_2}}}}$$

ملاحظة: ويجب الأخذ بعين الاعتبار معامل التصحيح في حساب الانحراف المعياري إذا توفرت شروط استخدامه.

2- **توزيع المعاينة للمجاميع :** يعرف توزيع المعاينة لمجموع وسطين كالتالي:

$$\mu_{\bar{X}_1+\bar{X}_2}=\mu_{\bar{X}_1}+\mu_{\bar{X}_2}=\mu_1+\mu_2$$

ويكون انحرافه المعياري:

أ- المجتمع غير منته أو السحب مع الإعادة:

$$\sigma_{\bar{X}_1+\bar{X}_2}=\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}_1}+\sigma^2_{\bar{X}_2}}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ب- المجتمع منته و السحب دون إرجاع:

$$\sigma_{\bar{X}_1+\bar{X}_2}=\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}_1}+\sigma^2_{\bar{X}_2}}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\frac{N_2-n_2}{N_2-1}}$$

ويكون توزيع المعاينة يتبع التوزيع الطبيعي:

$$(\bar{X}_1+\bar{X}_2)\sim N\left((\mu_{\bar{X}_1}+\mu_{\bar{X}_2}),\ \sigma^2_{\bar{X}_1+\bar{X}_2}\right)$$

وتعطى القيمة المعيارية $\boldsymbol{Z}$ بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\boldsymbol{Z}=\frac{(\bar{X}_1+\bar{X}_2)+(\mu_1+\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1+\bar{X}_2}}=\frac{(\bar{X}_1+\bar{X}_2)+(\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}_1}+\sigma^2_{\bar{X}_2}}}}$$

VI. توزيع المعاينة بين نسبتي عينتين:

إذا أخذنا عينتان مستقلتان من مجتمعين يخضعان للتوزيع ذو الحدين بنسبتين هما $\bar{P}_1$ و $\bar{P}_2$، فإن الفرق بين النسبتين من العينتين $(\bar{P}_1-\bar{P}_2)$ سيخضع تقريبا إلى التوزيع الطبيعي حيث:

وسطه الحسابي: (P_1-P_2)

وتباينه: $(\frac{P_1.q_1}{n_1} + \frac{P_2.q_2}{n_2})$

حيث تأخذ القيمة Z:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1.q_1}{n_1} + \frac{P_2.q_2}{n_2}}}$$

ملاحظة: ويجب الأخذ بعين الاعتبار معامل التصحيح في حساب الانحراف المعياري أو التباين إذا توفرت شروط استخدامه.