ثانيا: الدفعات:

الدفعات هي مبالغ مالية قد تكون متساوية أو غير متساوية تدفع على فترات زمنية قد تكون سنوية أو سداسية أو شهرية وغيرها، والفاصل الزمني بين سداد دفعتين هو المدة.

1- الدفعات المتساوية:(الثابتة)

1-1- تعريف الدفعات الثابتة: هي تلك الدفعات التي تكون مبالغها متساوية ابتداءا من أول دفعة الى أخر دفعة منها.

وتصنف الدفعات الثابتة او الثابتة الى عدة أشكال وذلك حسب المعيار المتخذ في التصنيف، لكن ما يهمنا أكثر هي أنواعها بحسب **معيار تاريخ الدفع**، والتي تتمثل في:

أ- دفعات ثابتة في نهاية المدة: تقدم بنهاية كل فترة وتسمى أيضا بدفعات السداد أو الدفعات العادية، وهي لتغطية التزام سابق أو لتسديد دين.

ب - دفعات ثابتة في بداية المدة: وتسمى بدفعات التوظيف أو الاستثمار وكذا الدفعات الفورية، هي تقدم في بداية الفترة وتهدف الى تكوين رأس المال وتدفع بمجرد ابرام العقد.

1-2- جملة الدفعات الثابتة:

أ- جملة الدفعات العادية:(في نهاية المدة) ان جملة عدد من دفعات نهاية المدة هي مجموع القيم المكتسبة لهذه الدفعات في تاريخ التسديد، ونرمز للقيمة المحصلة أو الجملة بالرمز V_n.

فاذا كانت: n: المدة (عدد الدفعات)، a: مبلغ الدفعة، t: معدل الفائدةالمركبة، فان:

جملة الدفعة الأولى: $a\,(1+t)^{n-1}$

جملة الدفعة الثانية: $a\,(1+t)^{n-2}$

جملة الدفعة الثالثة: $a(1+t)^{n-3}$

جملة الدفعة الأخيرة n: $a\,(1+t)^{n-n} = a$

أما جملة الدفعات V_n إذن هي مجموع القيم المكتسبة الناتجة عن توظيف كل دفعة بفائدة مركبة على حدى كما يلي:

$$Vn = a(1+t)^{n-1} + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-3} + \cdots . + a$$

والملاحظ أنها تمثل مجموع متتالية هندسية حدها الأول a أساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n أي:

$$Vn = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

ملاحظة: القيمة $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ متوفرة في الجدول المالي رقم 03

مثال01: شخص يدفع لمدة 6 سنوات مبلغ 50000 دج في نهاية كل سنة لتسديد قيمة عقار معين، أحسب قيمة هذا العقار في نهاية 6 سنوات إذا كان معدل الفائدة 6,5%.

$$Vn = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t} = 50000\,\frac{(1.065)^6 - 1}{0.065} = 353186{,}38$$

*تحديد عناصر جملة دفعات نهاية المدة:

✓ **قيمة الدفعة الثابتة:** تحسب كما يلي:

$$Vn = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t} \Rightarrow a = Vn\,\frac{t}{(1+t)^n - 1}$$

ملاحظة: لإيجاد قيمة الدفعة a يمكن استخراج القيمة $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ من الجدول المالي رقم 5 ونطرح منها القيمة t كالآتي:

$$a = Vn\left[\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} - t\right]$$

مثال: من أجل تسديد دين في نهاية ثلاث سنوات بملغ 31836، أحسب قيمة الدفعة السنوية التي تسمح بذلك والمودعة في نهاية كل سنة بمعدل فائدة 6.%

الحل:

1 . بالآلة الحاسبة: $a = 31836 \times \frac{0.06}{(1,06)^{-3}-1} = 10000\ DA$

2 . بالجدول المالي: $a = 10000\ [\frac{0,06}{1-(1,06)^{-3}} - 0,06\ ] = 10000\ DA$

✓ **حساب عدد الدفعات n :**

تحسب كما يلي: $Vn = a\ \frac{(1+t)^n-1}{t} \Rightarrow \frac{(1+t)^n-1}{t} = \frac{Vn}{a}$

ثم من الجدول المالي رقم 3 وعند المعدل المقترح وقيمة $\frac{Vn}{a}$ **نجد** n

مثال 1: يريد شخص تسديد دين قيمته 5579,67دج ، قيمة الدفعة 300دج بمعدل فائدة سنوي 3 % ، احسب عدد الدفعات اللازمة لتسديد هذا الدين.

الحل:

$$Vn = a\ \frac{(1+t)^n-1}{t} \Rightarrow \frac{(1+t)^n-1}{t} = \frac{Vn}{a} \Rightarrow \frac{5579,67}{300} = \frac{1,03^n-1}{0,03} \Rightarrow \frac{1,03^n-1}{0,03} = 18,5989$$

من الجدول المالي رقم 3 وعند المعدل 3 % والقيمة 18,5989 نجد 15 دفعة = n

. أو بطريقة اللوغاريتم:

$$\frac{1,03^n-1}{0,03} = 18,5989 \Rightarrow 1,03^n - 1 = 0,557967 \Rightarrow 1,03^n = 1,557967$$

$$\log 1,03^n = \log 1,557967$$

$$n \log 1,03 = \log 1,557967$$

$$n = \frac{\log 1,557967}{\log 1,03} = 14,99 = 15$$

. أو بطريقة أخرى:

$$\frac{1,03^n-1}{0,03} = 18,5989 \Rightarrow 1,03^n - 1 = 0,557967 \Rightarrow 1,03^n = 1,557967$$

من الجدول المالي رقم 01 وعند المعدل 3 % والقيمة 1,557967 نجد n = 15 دفعة.

✓ **حساب المعدل t:**

يحسب كما يلي : $\frac{A}{a} = \frac{(1+t)n-1}{t}$

مثال 1: ما هو معدل الفائدة المطبق الذي يسمح بتكوين رأسمال قدره 75467,35 دج بـ 10 دفعات ثابتة لنهاية المدة ، قيمة الدفعة 6000 دج .

الحل:

$$\frac{75467,35}{6000} = \frac{(1+t)^{10}-1}{t} = 12,577891667$$

من الجدول المالي رقم 03 وعند القيمة 12,577891667 وعند n = 10 نجد t = 5 %

*القيمة الحالية لجملة دفعات نهاية المدة:

القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة هي قيمتها عند الفترة صفرأي قبل سنة من دفع الدفعة الأولى وقد تتوافق مع تاريخ الاتفاق على التسديد.

القيم الحالية لكل دفعة على حدى في التاريخ صفر ستكون بالشكل الموالي:

القيمة الحالية عن الدفعة الأولى: $a\,(1+t)^{-1}$

القيمة الحالية عن الدفعة الثانية: $a\,(1+t)^{-2}$

القيمة الحالية عن الدفعة الثالثة: $a(1+t)^{-3}$

.

.

القيمة الحالية عن الدفعة قبل الأخيرة n : $a\,(1+t)^{-(n-1)}$

القيمة الحالية عن الدفعة الأخيرة n : $a\,(1+t)^{-n}$

ومنه القيمة الحالية لجميع الدفعات Va هي مجموع القيم الحالية الناتجة عن توظيف كل دفعة بفائدة مركبة على حدى كما يلي:

$$Va = a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + a(1+t)^{-3} + \cdots + a\,(1+t)^{-n}$$

كما نلاحظ فإن القيمة الحالية لمجموع الدفعات Va هي مجموع متتالية هندسية حدها الأول $a\,(1+t)^{-n}$ أساسها $(1+t)$وعدد حدودها n، وبتطبيق قانون مجموع حدود المتتالية الهندسية ينتج:

$$Va = a\,(1+t)^{-n}\ \frac{(1+t)^{n}-1}{1+t-1} = \frac{a\,(1+t)^{-n}(1+t)^{n}-1a\,(1+t)^{-n}}{1+t-1}$$

$$\text{ومنه}\quad Va = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

ملاحظة: باستخدام الجدول المالي رقم 4 نجد القيمة $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ عند تقاطع t و n المرافقتين

مثال: شخص يسدد في نهاية كل سنة مبلغ 20000 دج بمعدل 5% ولمدة 7 سنوات.

أحسب القيمة الحالية لهذه الدفعات ثم جملتها في نهاية الدفع؟

الحل:

$$Va = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 20000\,\frac{1-(1+0{,}05)^{-7}}{0{,}05} = 115727{,}47$$

أو باستخدام الجدول المالي رقم 4 نجد القيمة 5,786 عند تقاطع i=5% و n=7

$\Rightarrow V0 = 115720$ $\Rightarrow V0 = 5{,}786 \times 20000$

$$Vn = a\,\frac{(1+t)^{n}-1}{t} = 20000\,\frac{(1.05)^{7}-1}{0.05} = 162840{,}17$$

ب- جملة الدفعات الفورية:(بداية المدة) هي مجموع القيم المكتسبة لهذه الدفعات في تاريخ التسديد:

وعليه فجملة كل دفعة على حدا في تاريخ التسديد ستكون بالشكل الموالي:

جملة الدفعة الأولى: $a\,(1+t)^{n}$

جملة الدفعة الثانية: $a\,(1+t)^{n-1}$

جملة الدفعة الثالثة: $a(1+t)^{n-2}$

.

.

جملة الدفعة قبل الأخيرة n : $a\,(1+t)^{2}$

جملة الدفعة الأخيرة n : $a\,(1+t)^{1}$

ومنه فجملة الدفعات الفورية Vn هي مجموع القيم المكتسبة الناتجة عن توظيف كل دفعة بفائدة مركبة على حدى كما يلي:

$$Vn = a(1+t)^{1} + a(1+t)^{2} + a(1+t)^{3} + \cdots + a(1+t)^{n}$$

وهي تمثل متتالية هندسية حدها الأول $a(1+t)^{1}$ أساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n، وبتطبيق قانون مجموعها نجد:

$$Vn' = a(1+t)\,\frac{(1+t)^{n}-1}{1+t-1}$$

$$\Rightarrow \quad Vn' = a(1+t)\,\frac{(1+t)^{n}-1}{t}$$

نلاحظ بأن علاقة دفعات بداية المدة توظف بفترة إضافية $(1+t)$ عن دفعات نهاية المدة $a\,\frac{(1+t)^{n}-1}{t}$ وعليه يمكن إعادة كتابة العلاقة السابقة كالآتي :

$$Vn' = V_n\,(1+t)$$

حيث Vn تمثل جملة دفعات نهاية المدة.

ومن علاقة جملة دفعات بداية المدة يمكن استخراج علاقة أخرى تؤدي إلى نفس النتيجة بضرب حدي بسطها في $(1+t)$:

$$Vn' = a\,\frac{(1+t)^{n}-1}{t}\,(1+t) = a\,\frac{(1+t)^{n}(1+t)-(1+t)}{t} = a\,\frac{(1+t)^{n+1}-1-t}{t} = a\left[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t} - \frac{t}{t}\right]$$

$$\Rightarrow Vn' = a\left[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t} - 1\right]$$

ملاحظة: يمكن استنتاج قيمة $\frac{(1+t)^{n}-1}{i}$ من الجدول المالي رقم 03 وكذلك يتم الحصول على قيمة $(1+t)$ من الجدول رقم 01.

مثال: شخص يودع دفعات ثابتة سنوية (لبداية السنة) قيمة كل منها 12500 بمعدل فائدة 12% ولمدة 9 سنوات، أحسب ماتجمع لهذا الشخص خلال نهاية هذه الفترة؟

$$Vn' = a(1+t)\,\frac{(1+t)^{n}-1}{t} = 12500(1+10{,}12)\,\frac{(1+120{,}12)^{9}-1}{120{,}12} = 206859{,}188$$

أو باستخدام الجدول المالي 03 عند تقاطع 12% و9سنوات نجد القيمة14.775656 ونقوم بالتطبيق العددي كما يلي:

$$Vn' = 12500 \times 1.12 \times 14.775656 = 206859.184$$

***تحديد عناصر جملة دفعات بداية المدة:**

✓ **حساب قيمة الدفعةa:**

لدينا:

$$Vn' = a(1+t)\,\frac{(1+t)^{n}-1}{t}$$

$$a = Vn' \div \frac{(1+t)^n - 1}{t} (1 + t)^{-1}$$

$$a = Vn' (1+t)^{-1} [\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} - t]$$

مثال: اذا علمت أن جملة 15 دفعة لبداية المدة هي 1505024,2128 وان معدل الفائدة المطبق هو 6%، ماهي قيمة الدفعة؟

الحل:

$$a = Vn' (1+t)^{-1} [\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} - t] = 1505024,2128 \ (1+0,06)^{-1} [\frac{0,06}{1-(1+0,06)^{-15}} - 0,06] = 61000.$$

✓ **حساب عدد الدفعات:** تحسب من العلاقة :

$$Vn' = a \frac{(1+t)^n - 1}{t} (1+t) \Rightarrow \frac{(1+t)^n - 1}{t} = \frac{Vn'}{a} (1 + t)^{-1}$$

مثال1: ما هو عدد الدفعات اللازمة حتى يتمكن شخص من تكوين رأسمال قيمته 109779,887دج بعد توظيف 10000 في بداية كل سنة بمعدل فائدة سنوي 7%.

الحل:

$$\frac{(1+t)^n - 1}{t} = \frac{Vn'}{a} (1 + t)^{-1} \Rightarrow \frac{(1,07)^n - 1}{0,07} = \frac{109779,887}{10000} (1,07)^{-1}$$

$$\frac{(1,07)^n - 1}{0,07} = 10,2598 \Rightarrow (1,07)^n = 1,718$$

$$\log (1,07)^n = \log 1,718$$

$$n \log 1,07 = \log 1,718$$

$$n = \frac{\log 1,781}{\log 1,07} = 7,99 = 8$$

من الجدول المالي رقم 03 وعند القيمة 25,26 والمعدل 7 % نجد عدد الدفعات 8.

✓ **حساب معدل التوظيف:**

يحسب من العلاقة :

$$Vn' = a \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - 1 \Rightarrow \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} = \frac{Vn'}{a} + 1$$

مثال: استثمر شخص مبلغ 25000 دج في بداية كل سنة لمدة 9 سنوات فتحصل في نهاية السنة الأخيرة على جملة قدرها 337164,06، احسب معدل التوظيف؟

الحل:

$$\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} = \frac{Vn'}{a} + 1 \Rightarrow \frac{(1+t)^{9+1} - 1}{t} = \frac{337164,06}{25000} + 1 \Rightarrow \frac{(1+t)^{10} - 1}{t} = 14,4865$$

من الجدول المالي رقم (03) وعند القيمة 14,4865 والمدة10 سنوات نجد t = 8 %

***القيمة الحالية لجملة دفعات بداية المدة :** ما هي إلا مجموع القيم الحالية لهذه الدفعات في التاريخ صفر.

ومنه القيم الحالية لكل دفعة على حدى في التاريخ صفر ستكون بالشكل الموالي:

القيمة الحالية عن الدفعة الأولى: a

القيمة الحالية عن الدفعة الثانية: $a (1 + t)^{-1}$

القيمة الحالية عن الدفعة الثالثة: $a (1 + t)^{-2}$

القيمة الحالية عن الدفعة الرابعة:$a(1+t)^{-3}$

.

.

القيمة الحالية عن الدفعة الأخيرةn: $a\,(1+t)^{-(n-1)}$

وعليه فالقيمة الحالية لجميع الدفعات الفورية Va' هي مجموع القيم الحالية الناتجة عن توظيف كل دفعة بفائدة مركبة على حدى كما يلي:

$$Va' = a + a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \cdots + a\,(1+t)^{-(n-1)}$$

وهي عبارة عن مجموع متتالية هندسية حدها الأول a أساسها $(1+t)^{-1}$وعدد حدودها n وبالتالي فمجموعها هو:

$$Va' = a\,\frac{[(1+t)^{-1}]n - 1}{(1+t)^{-1} - 1}$$

بضرب كل من البسط والمقام في المقدار $-(1+t)$ يصبح لدينا

$$Va' = a(1+t)\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{-(1+t)(1+t)^{-1}+(1+t)}$$

$$Va' = a(1+t)\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

ملاحظة: باستخدام الجدول المالي رقم 4 نجد القيمة $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ عند تقاطع t و n المرافقتين.

نلاحظ من هذه العلاقة بان القيمة $a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ تمثل القيمة الحالية لدفعات السداد أي Va ، إذن يمكن كتابة علاقة Va' بدلالة Va كالآتي:

$$Va' = Va\,(1+t)$$

مثال : أحسب القيمة الحالية لـ 7 دفعات استثمار قيمة كل منها 30000 بمعدل فائدة6%.

$$Va' = a(1+t)\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 30000(1+0{,}06)\,\frac{1-(1+0{,}06)^{-7}}{0{,}06} = 177519{,}73$$

أو باستخدام الجدول المالي رقم 4 نجد القيمة $\frac{1-(1+0{,}06)^{-7}}{0{,}06}$ =5,58238 عند تقاطع 6% و n=7، ومنه:

$$Va' = 30000(1+0{,}06).\ 5.58238 = 177519{,}73$$

2- الدفعات غيرالمتساوية:(المتغيرة)

2-1- تعريف الدفعات المتغيرة: هي تلك الدفعات التي لا تكون قيم مبالغها متساوية وهي نوعان:

أ- دفعات متغيرة وفق نظام معين: هي تلك الدفعات التي يخضع تغيرها لقانون رياضي يجمع بينهما أي أنها دفعات تتزايد أو تتناقص مبالغها وفق قاعدة معينة مثل المتتالية الهندسية أو الحسابية.

***دفعات تشكل متتالية هندسية:** في حالة ما إذا كان للشخص إمكانيات الدفع متزايدة من سنة الى أخرى، فيمكن أن يتم الدفع بأقساط تشكل متتالية هندسية.

فاذا كانت: n: المدة (عدد الدفعات)، a_1: مبلغ الدفعة الأولى، t: معدل الفائدة المركبة، q: أساس المتتالية الهندسية.

فان جملة هذه الدفعات Vn والقيمة الحالية لها Va تكون كالتالي:

✓ دفعات نهاية المدة:

إذا كان $q \neq 1+t$: تكون لدينا:

$$Vn = a_1 \frac{(1+t)^n - q^n}{(1+t)-q}$$

$$Va = \frac{a_1}{(1+t)^n} \frac{1-(1+t)^n - q^n}{(1+t)-q}$$

إذا كان $q = 1+t$: تكون لدينا:

$$Vn = n \cdot a_1 (1+t)^{n-1}$$

$$Va = n \cdot a_1 (1+t)^{-1} = n \frac{a_1}{(1+t)}$$

✓ دفعات بداية المدة:

إذا كان $q \neq 1+t$: تكون لدينا:

$$Vn = a_1 (1+t) \frac{(1+t)^n - q^n}{(1+t)-q}$$

$$Va = \frac{a_1}{(1+t)^{n-1}} \frac{(1+t)^n - q^n}{(1+t)-q}$$

إذا كان $q = 1+t$: تكون لدينا:

$$Vn = n \cdot a_1 (1+t)^n$$

$$Va = n \cdot a_1$$

*دفعات تشكل متتالية حسابية:

✓ دفعات نهاية المدة:

$$Vn = (a_1 + \frac{r}{t}) \frac{(1+t)^n - 1}{t} - \frac{n}{t}$$

$$Va = (a_1 + \frac{r}{t} + nr) \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} - \frac{nr}{t}$$

✓ دفعات بداية المدة:

$$Vn = (1+t)\left[(a_1 + \frac{r}{t}) \frac{(1+t)^n - 1}{t} - \frac{nr}{t}\right]$$

$$Va = (1+t)\left[(a_1 + \frac{r}{t} + nr) \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} - \frac{nr}{t}\right]$$

ب-دفعات متغيرة دون نظام: وهي الدفعات التي لا تخضع في تغيرها لنظام معين، أي لا نجد بينها علاقة رياضية تجمع بينهما.