الفصل الأول: مدخل إلى نظرية الاحتمالات

مقدمة

إن الإحصاء الوصفي يهتم بتلخيص وتوصيف مجموعة من البيانات، أما الإحصاء الاستدلالي (الاحتمالات) فهو علم يهتم بتعميم الحكم عن خواص الكل (المجتمع) من خلال دراسة وفحص واقع جزء من هذا الكل (العينة). ولكي يكون هذا التعميم سليما، فإن العينة يجب أن تكون ممثلة للمجتمع وأن يتم تحديد احتمال الخطأ في هذا التعميم.

I/ تعاريف و مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمالات

1- التجربة أو الاختبار: إن كل عملية نقوم بها تكون متبوعة بنتيجة عشوائية وغير مؤكدة ولكننا نعلم أنها ستكون نتيجة من بين نتائج مجموعة معينة، نقول عنها أنها عبارة عن تجربة أو اختبار. وكل نتيجة ممكنة تدعى إمكانية، أما مجموعة كل النتائج فتدعى "مجموعة الإمكانيات" ونرمز لها بالرمز $\boldsymbol{\Omega}$

مثال1

إن رمي قطعة نقود تعتبر تجربة أو اختبار. فعند إلقائها تبدأ التجربة وبعد سقوطها مباشرة تنتهي هذه التجربة، عندها نقول أن مجموعة الإمكانيات هي: $\Omega = \{P, F\}$ بحيث P تدعى إمكانية وF تدعى إمكانية أخرى

مثال2

في تجربة تتمثل في إلقاء زهرة النرد، فإن كل وجه يحمل رقما محصورا بين 1 و6 هو إمكانية ومجموعة الإمكانيات هي $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2- الحادث: لتكن $\boldsymbol{\Omega}$ مجموعة الإمكانيات، نسمي حادثا أوليا كل مجموعة جزئية أحادية العنصر من المجموعة $\boldsymbol{\Omega}$. ونسمي حادثا مركبا كل مجموعة جزئية غير بسيطة من المجموعة $\boldsymbol{\Omega}$

مثال

التجربة المتمثلة في إلقاء زهرة النرد حوادثها البسيطة هي $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ أما أحد الحوادث المركبة فهي على سبيل المثال لا الحصر المجموعة الجزئية التي تشمل مثلا الوجوه الفردية $A = \{1,3,5\}$

1-2 وقوع حادث: نقول بأن الحادث A المرتبط بتجربة ما قد وقع أو قد تحقق، إذا ظهر أحد عناصره بعد إجراء هذه التجربة

مثال

ليكن الحادثان $A = \{1,3,5,6\}$ و $B = \{2,4\}$ حادثان مرتبطان بإلقاء زهرة النرد ونفرض أن بعد رميها ظهرت الإمكانية 2. نقول في هذه الحالة أن الحادث B قد وقع كون 2 تنتمي إلى B والحادث A لم يتحقق لأن 2 لا تنتمي إليه

2-2 الحادث الأكيد: إذا كانت $\boldsymbol{\Omega}$ مجموعة الإمكانيات لتجربة معينة، فبعد إجراء هذه التجربة سوف تظهر حتما إحدى النتائج الممكنة وبالتالي فالحادث $\boldsymbol{\Omega}$ هو حادث أكيد الوقوع ولهذا نسمي $\boldsymbol{\Omega}$ بالحادث الأكيد.

3-2 الحادث المستحيل: هو الحادث الذي لا يمكن أن يقع نتيجة تجربة ما. ويرمز له بالرمز $\emptyset$

مثال

في تجربة رمي قطعة نقود نحصل على $\Omega = \{P, F\}$ نقول في هذه الحالة أن الحادث $\boldsymbol{\Omega}$ هو الحادث الأكيد لأنه يكفي بأن يظهر P أو F لنقول أن الحادث $\boldsymbol{\Omega}$ قد وقع. بينما ظهور P وF معا يعد مستحيلا وبالتالي:

$$\emptyset = \{\boldsymbol{P}\} \cap \{\boldsymbol{F}\}$$

4-2 الحادث المتمم (المعاكس): إذا كان A حادثا للمجموعة $\boldsymbol{\Omega}$ فإن متمم A بالنسبة لنفس المجموعة هو مجموعة جزئية من $\boldsymbol{\Omega}$ نرمز لها بالرمز $\bar{A}$ حيث إذا وقع الحادث A فإن الحادث $\bar{A}$ لا يقع والعكس صحيح. وفي هذه الحالة نقول أن الحادثان A و $\bar{A}$ متعاكسان إذا كان:

$$\Omega = A \cup \bar{A} \text{ و } \emptyset = A \cap \bar{A}$$

مثال

عند رمي زهرة النرد نهتم بالحادث A الذي يمثل ظهور رقم زوجي ومنه:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \quad A = \{2,4,6\} \Leftrightarrow \bar{A} = \{1,3,5\}$$

5-2 الحادث $A \cup B$: إذا كان A و B حادثين فإن A أو B هو أيضا حادث ونرمز له بالرمز $A \cup B$ ومنه نقول أن الحادث $A \cup B$ قد وقع إذا وفقط إذا وقع أحد الحادثين على الأقل

مثال

عند رمي زهرة النرد تكون $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ إذا افترضنا أن:

A: "ظهور رقم زوجي"

B: "ظهور رقم أصغر من 4"

فالحادث $A \cup B$ يصبح:

$A \cup B$: "ظهور رقم زوجي أو رقم أصغر من 4"

6-2 الحادث A ∩ B: إذا كان A وB حادثين فإن A وB هو أيضا حادث ونرمز له بالرمز $A \cap B$ ومنه نقول أن الحادث $A \cap B$ قد وقع إذا وفقط إذا وقع الحادثين معا

7-2 الحوادث المتنافية وغير المتنافية: الحوادث المتنافية هي تلك الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد حيث وقوع أحدها ينفي وقوع الآخر وهذا يعني عدم وجود إمكانيات مشتركة بين الحادثين. وعليه نقول أن A وB حادثان متنافيان إذا كان

$$\emptyset = B \cap A$$

وإذا أمكن الحصول على الحادثين في آن واحد، نقول بأنهما غير متنافيين.

مثال

عند رمي قطعة نقود مرة واحدة فإن ظهور P ينفي ظهور F. أما عند رمي قطعتي نقود فإن ظهور P وF غير متنافيان

8-2 الحوادث المستقلة: يقال عن حادثين أنهما مستقلين إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الآخر. فنتائج عدة رميات متعاقبة لزهرة النرد تمثل حوادث مستقلة عن بعضها البعض لأن حادث ظهور رقم معين في إحدى الرميات مستقل عن حادث ظهور رقم آخر في رمية أخرى. أما إذا كان وقوع حادث ما يؤثر في وقوع الحادث الآخر، فنكون بصدد الحديث عن حوادث غير مستقلة (حوادث شرطية).

II/ التعريف الرياضي للاحتمال

1- تعريف: لنعتبر أن الحدث A يمكن حدوثه بعدد r من الطرق المختارة من أصل n من الطرق المتوفرة والمتماثلة الحدوث. يعبر عن احتمال وقوع هذا الحدث (يسمى نجاح) بالشكل:

$$\underbrace{P(A)}_{\text{احتمال حدوث الحادث } A} = \frac{r \text{ (عدد الحالات الممكنة)}}{n \text{ (عدد الحالات الكلية)}}$$

مثال

لتكن لدينا تجربة رمي زهرة نرد، فإذا كان A هو حادث الحصول على الأعداد الزوجية، فإن احتمال حدوث A هو:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2- بديهيات نظرية الاحتمالات

أ/ $0 \le P(A) \le 1$

ب/ إذا كان A وB حادثان متنافيان فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

لتعميم الخاصية نقول:

إذا كان $A_1, A_2, \dots, A_n$ حوادث متنافية مثنى مثنى فإن:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n) = 1$$

ج/ $P(\Omega) = 1$ و $P(\emptyset) = 0$

د/ A و $\bar{A}$ حادثان متعاكسان وبالتالي متنافيان ومنه:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مثال

في تجربة رمي زهرة نرد، حدد احتمال عدم الحصول على الرقم 1.

إذا افترضنا أن A هو الحادث الذي يمثل ظهور الرقم 1، فإن الحادث $\bar{A}$ هو الذي يمثل عدم ظهور الرقم 1 وعليه:

$$P(A) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

3- القوانين الأساسية في الاحتمالات

1-3 قانون الجمع

أ- حالة الحوادث المتنافية

رأينا سابقا أن مجموع حادثين متنافيين هو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال

كيس به 10 كرات حمراء، 5 بيضاء و15 سوداء. إذا سحبنا كرة واحدة، ما احتمال أن تكون:

1- حمراء أو بيضاء

2- حمراء أو سوداء

$$P(R) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$
$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$
$$P(N) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$
$$P(R \cup B) = P(R) + P(B) = \frac{1}{2}$$
$$P(R \cup N) = P(R) + P(N) = \frac{5}{6}$$

وبالتالي، فالحالة العامة، أي في حالة جمع n حادث متنافي، هي:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

ب- حالة الحوادث غير المتنافية

إذا افترضنا أن A وB حادثان غير متنافيان، فإن احتمال حصول A أو B هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

بصفة عامة، يمكن تعميم هذا القانون بأخذ 3 حوادث غير متنافية فيكون:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

2-3 قانون الضرب

أ- حالة الحوادث المستقلة

إذا كان A وB حادثين مستقلين، فإن احتمال وقوع A وB معا يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ب- حالة الحوادث غير المستقلة (الاحتمال الشرطي)

ليكن A وB حادثان حيث:

$$P(B) \neq 0 \quad و \quad A \cap B \neq \emptyset$$

نسمي احتمالا شرطيا للحادث A بالنسبة للحادث B (أي احتمال وقوع A علما أن B قد وقع) إذا تحقق ما يلي:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$$

نظرية بايز Bayes

من القانون السابق للاحتمال يمكن استنتاج ما يلي:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) = P(A) \times P(B/A)$$

ومنه:

$$\text{(قانون بايز)} \quad P(A/B) = \frac{P(A) \times P(B/A)}{P(B)}$$

في الحالة العامة، تعطى العلاقة كما يلي:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \times P(B/A_i)}{\sum[P(A_i) \times P(B/A_i)]}$$

تنبيه: يمكن مشاهدة الشرح التفصيلي للمحاضرات و حلول سلاسل التمارين من خلال متابعة قناة الأستاذ المكلف بالمادة، و ذلك من خلال الرابط التالي:

www.youtube.com/c/drsaadouadel

لتسهيل عملية البحث يرجى النقر على **PLAYLISTS** ثم اختيار **محاضرات الإحصاء 2** لعرض كل الفيديوهات حسب تسلسلها الزمني

لا تنسوا الاشتراك في القناة ليصلكم كل جديد