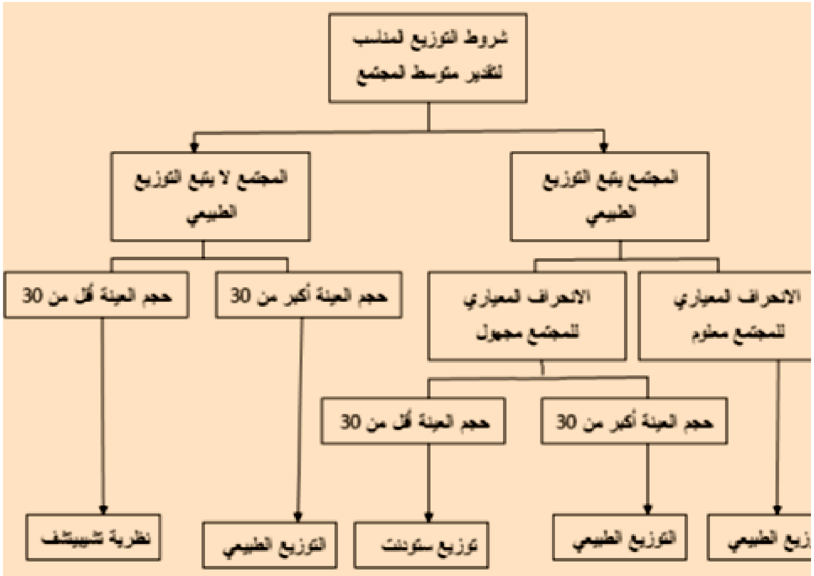
نظرية التقدير

يقصد بالتقدير أن نقدر معالم المجتمع المجهولة عن طريق بيانات العينة المتاحة ونظرية التقدير نوعان : (أ/ التقدير بنقطه او التقدير وحيد القيمه ، ب/ التقدير بفترة ثقه) .

التقدير بنقطة نعتبر التقدير بالعينة هو نفسة القيمة الحقيقة بالمجتمع، فنسقط تقدير العينة على مؤشر المجتمع المجهول فقيمة المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ هي تقدير بنقطة لوسط المجتمع μ، والقيمة المفردة للانحراف المعياري S كتقدير بنقطة للانحراف المعياري للمجتمع σ . كذلك يمكن استخدام النسبة فى العينة $\bar{p}$ كمقدر للنسبة P في المجتمع.

التقدير بمجال (التقدير بفترة فنحصل من خلاله على مجال(intervalle) أو فترة تتحدد بحدين (حد أدنى وحد أعلى) نحصل عليهما من العينة. ونلاحظ هنا أن فترة التقدير(أو تقدير الفترة) تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائيا في كثير من الحالات.

I– مجال الثقة لمتوسط المجتمع المجهول: تصادفنا عدة حالات نلخصها في الشكل الموالي:



1- فترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه معلوم

إذا كان المجتمع المسحوب منه العينة ذا توزيعاً طبيعياً وتباينه معروفاً فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي يكون توزيعاً طبيعياً، ويكون مجال الثقة للوسط الحسابي للمجتمع كالتالي:

$$p\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

حيث: $IC(\mu)_{1-\alpha} = \left[\bar{X} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

حيث: α الخطأ

1-α: درجة الثقة

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: تستخرج من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: خطأ التقدير

2– فترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه مجهول

إذا كان المجتمع المسحوب منه العينة ذا توزيعاً طبيعياً وتباينه مجهولا فإننا نكون أمام حالتين:

أ- حجم العينة أكبر من 30: نستخدم التوزيع الطبيعي كمايلي:

$$p\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

حيث: $IC(\mu)_{1-} = \left[\bar{X} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

ب- حجم العينة أقل من 30: نستخدم توزيع ستيودنت

$$p\left(\bar{X} - T_{(1-\frac{\alpha}{2},V)}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + T_{(1-\frac{\alpha}{2},V)}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = (1-\alpha)$$

حيث: $IC(\mu)_{1-\alpha} = \left[\bar{X} \mp T_{(1-\frac{\alpha}{2},V)}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

3- فترة الثقة لمتوسط مجتمع توزيعه مجهول وتباينه معلوم

أ- حجم العينة أكبر من 30: نستخدم التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهاية المركزية

$$p\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

حيث: $IC(\mu)_{1-\alpha} = \left[\bar{X} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

ب- حجم العينة أقل من 30: نستخدم نظرية تشيبيشيف

$$p\left(\bar{X} - K\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + K\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1-\alpha)$$

$$1 - \frac{1}{K^2} = 1-\alpha$$

مثال:

لدينا مجتمع إحصائي حجمه 1000 قدر تباينه بـ 900، سحبنا منه عينة عشوائية بسيطة حجمها 25 وقدر متوسطها الحسابي بـ 80.

أوجد مجال الثقة 95% لمتوسط المجتمع غير المعلوم.

الحل:

$1-\alpha = 0,95$

$1 - \frac{1}{K^2} = 1-\alpha \quad ==> \; 1 - \frac{1}{K^2} = 0.95 \quad ==> \quad \frac{1}{K^2} = 1 - 0.95$

$==> \frac{1}{K^2} = 0.05 \quad ==> \; 0.05\,K^2 = 1 \quad ==> \; K^2 = \frac{1}{0,05} = 20$ ==>k=4,47

$\frac{n}{N} = \frac{25}{1000} = 0,025 < 0,05$ لا نستخدم معامل التصحيح

$$\bar{X} - K\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + K\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$==> 80 - 4,47\frac{30}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 80 + 4,47\frac{30}{\sqrt{25}}$$

$$==> 80 - 26,82 \leq \mu \leq 80 - 26,82$$

$$==> 53,18 \leq \mu \leq 106,82$$

ومنه مجال الثقة 95% لمتوسط المجتمع ينتمي للمجال $[106,82 - 53,18]$

II- مجال الثقة لمتوسط المجتمع المجهول: تصادفنا عدة حالات نلخصها في الشكل الموالي:

أ- فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتباينهما معلوم

$$p\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\le(\mu_1-\mu_2)\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)=(1-\alpha)$$

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{1-\alpha}=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

مثال:

قامت دراسة بمقارنة متوسط الدخل الشهري للأسر القاطنة بمدينة A بمتوسط الدخل الشهري للأسر القاطنة بمدينة B، فإذا كان تباين الدخول في المدينة A هو 6400 ون، وتباين الدخول في المدينة B هو 3600 ون، فإذا اخترنا من مدينة A عينة عشوائية تحتوي على 400 أسرة ووجدنا أن متوسط الدخل الشهري لهذه الأسر يساوي 250 ون، واخترنا من مدينة B عينة عشوائية مستقلة عن العينة السابقة تحتوي على 300 أسرة ووجدنا أن الدخل الشهري لهذه الأسر يساوي 210 ون.

المطلوب: أحسب فترة الثقة للفرق بين متوسطي الدخول في المدينتين عند مستوى ثقة 95% علما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي.

الحل:

$$\sigma_1^2=6400\ ,\ n_1=400,\bar{X}_1=250$$

$$\sigma_2^2=3600\ ,\ n_2=300,\bar{X}_2=210$$

$$1-\alpha=0.95 ==> \alpha=0.05 ==> \frac{\alpha}{2}=0.025$$

$$1-\frac{\alpha}{2}=0.975 ==> Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.975}=1.96$$

$$(250-210)-1.96\sqrt{\frac{6400}{400}+\frac{3600}{300}}\le(\mu_1-\mu_2)\le(250-210)+1.96\sqrt{\frac{6400}{400}+\frac{3600}{300}}$$

$$40-10.37\le(\mu_1-\mu_2)\le 40+10.37$$

$$29.63\le(\mu_1-\mu_2)\le 50.37$$

ومنه مجال الثقة 95% لمتوسط المجتمع ينتمي للمجال **[50.37 -29.63]**

ب- فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتباينهما مجهولان و $n_1, n_2 > 30$

$$p\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\le(\mu_1-\mu_2)\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)=(1-\alpha)$$

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{1-\alpha}=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right]$$

ج- فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتباينهما مجهولان و $n_1, n_2 < 30$

نسجل حالتين:

- تباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين

$$p\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-T_{\left(1-\frac{\alpha}{2},V\right)}\sqrt{SP^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\leq(\mu_1-\mu_2)\leq(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+T_{\left(1-\frac{\alpha}{2},V\right)}\sqrt{SP^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right)=1-\alpha$$

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{1-\alpha}=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\mp T_{\left(1-\frac{\alpha}{2},V\right)}\sqrt{SP^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right]$$

$$\mathrm{V}=\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2-2\ ;\ SP^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_1^2}{n_1+n_2-2}$$

مثال:

أخذت عينة عشوائية حجمها 6 فكان وسطها الحسابي 7وتباينها 4.4 من مجتمع إحصائي طبيعي، وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 5 فكان وسطها الحسابي 5 وتباينها 3.5 من مجتمع إحصائي طبيعي أخر.او ذا كان تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين.

المطلوب: اوجد فترة الثقة 95 % للفرق بين متوسطي المجتمعين؟

الحل:

$$S_1^2=4.4\ ,\ n_1=6,\ \ \bar{X}_1=7$$
$$S_2^2=3.5,\ \ n_2=5,\ \bar{X}_2=5$$

بما أن المجتمعان يتوزعان توزيعا طبيعيا بتباينين مجهولين ومتساويين، إضافة إلى حجم العينتين صغير فإن:

$$1-\alpha=0.95 ==> \alpha=0.05 ==> \frac{\alpha}{2}=0.025$$
$$1-\frac{\alpha}{2}=0.975$$
$$\mathrm{V}=\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2-2=6+5-2=9$$
$$T_{\left(1-\frac{\alpha}{2},V\right)}=T_{(0.975,9)}=2.262$$
$$SP^2=\frac{(6-1)4.4+(5-1)3.5}{6+5-2}=4$$

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{1-\alpha}=\left[(7-5)\mp 2.262\sqrt{4\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)}\right]$$
$$(0.739\leq(\mu_1-\mu_2)\leq 4.739)$$

- تباينا المجتمعين مجهولين وغير متساويين

$$p\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-T_{\left(1-\frac{\alpha}{2},V\right)}\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)}<(\mu_1-\mu_2)<(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+T_{\left(1-\frac{\alpha}{2},V\right)}\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)}\right)$$
$$=1-\alpha$$

$$V=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

<u>مثال:</u>

نفرض أنه لدينا مجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي، حيث سحبت من المجتمع الأول عينة حجمها 10 ومتوسطها الحسابي 310 وانحرافها المعياري 165، ومن الثاني عينة حجمها 20 حيث متوسطها الحسابي 235 انحرافها المعياري 100، بفرض أن التجانس بين المجتمعين غير متساو.

المطلوب: أحسب فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى ثقة 99%.

الحل:

$$S_1=165\,,\quad n_1=10,\quad \bar{X}_1=310$$
$$S_2=100,\quad n_2=20,\quad \bar{X}_2=100$$

بما أن المجتمعان يتوزعان توزيعا طبيعيا بتباينين مجهولين وغيرمتساويين، إضافة إلى حجم العينتين صغير فإن:

$$1-\alpha=0.99 ==> \alpha=0.01 ==> \frac{\alpha}{2}=0.005 ==> 1-\frac{\alpha}{2}=0.995$$

$$V=\frac{\left(\frac{165^2}{10}+\frac{100^2}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{165^2}{10}\right)^2}{10-1}+\frac{\left(\frac{100^2}{n_{220}}\right)^2}{20-1}}=12{,}41=12$$

$$T_{\left(1-\frac{\alpha}{2},V\right)}=T_{(0.995,12)}=3.055$$

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{0.99}=\left[(310-235)\mp 3.055\sqrt{\left(\frac{165^2}{10}+\frac{100^2}{20}\right)}\right]$$

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{0.99}=[(-98{,}42)-248{,}42]$$

III- فترة الثقة لنسبة المجتمع

$$p\left(\bar{P}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}\bar{q}}{n}}\leq P\leq \bar{P}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}\bar{q}}{n}}\right)=(1-\alpha)$$

$$IC(P)_{1-\alpha}=\left[\bar{P}\mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}\bar{q}}{n}}\right]$$

مثال:

لدى تلقيح 100 شخص ضد فيروس "كوفيد 19" تبين أن 18 منهم ظهرت عليهم أثار جانبية.

المطلوب:

1. أوجد 99% مجال ثقة لنسبة الذين يعانون من أثار جانبية .

2. ما حجم العينة التي ينبغي دراستها لتقدير النسبة بثقة 99% وبخطأ لا يتجاوز 0,04.

الحل:

$$n = 100\,,\quad X = 18$$

$$\bar{P} = \frac{X}{n} = \frac{18}{100} = 0{,}18,\quad \bar{q} = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$$

$$1 - \alpha = 0.99 ==> \alpha = 0.01 ==> \frac{\alpha}{2} = 0.005$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$$

$$0{,}18 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}18.0{,}82}{100}} \leq P \leq 0{,}18 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}18.0{,}82}{100}}$$

$$0{,}18 - 0{,}0991 \leq P \leq 0{,}18 + 0{,}0991$$

$$0,0809 \leq P \leq 0{,}2791$$

ومنه مجال الثقة 90% لنسبة المجتمع ينتمي للمجال [0,2791 – 0,0809]

2 – ما حجم العينة التي ينبغي دراستها لتقدير النسبة بثقة 99% وبخطأ لا يتجاوز 0,04

نرمز للخطأ بالرمز d حيث d=0,04

$$d = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}\bar{q}}{n}}$$

نربع الطرفين: $d^2 = Z^2\frac{\bar{P}\bar{q}}{n}$

نضرب الطرفين في الوسطين:

$$n.d^2 = Z^2\bar{P}\bar{q}$$

$$n = \frac{Z^2\bar{P}\bar{q}}{d^2} = \frac{2{,}58^2.0{,}18.0{,}82}{0{,}04^2}$$

$$n = 614{,}05 \cong 614$$

حجم العينة يجب أ ن سكون أكبر من أو يساوي 614

$$n \geq 614$$

III– فترة الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين

$$\boldsymbol{p}\left((\bar{P}_1 - \bar{P}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}_1\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{P}_2\bar{q}_2}{n_2}} \leq (P_1 - P_2) \leq (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}_1\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{P}_2\bar{q}_2}{n_2}}\right) = (1 - \alpha)$$

$$IC(P_1 - P_2)_{1-\alpha} = \left[(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}_1\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{P}_2\bar{q}_2}{n_2}}\right]$$

مثال:

أخذت عينة عشوائية حجمها 250 شخص من منطقة معينة فوجد أن 20% منهم عاطلين عن العمل، وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من منطقة أخرى حجمها 500 شخصا فوجد أن 7% منهم عاطلين عن العمل.

المطلوب: أحسب فترة الثقة للفرق بين نسبتي العاطلين في المنطقتين عند مستوى ثقة 90% علما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي

الحل:

$$n_1 = 250\ ,\ \bar{P}_1 = 0{,}20, \bar{q}_1 = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$$

$$n_2 = 500\ ,\ \bar{P}_2 = 0{,}07, \bar{q}_2 = 1 - 0{,}07 = 0{,}93$$

$$1 - \alpha = 0.90 ==> \alpha = 0.10 ==> \frac{\alpha}{2} = 0.\ 05 ==>\ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 ==> Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}65$$

$$(0{,}20 - 0{,}07) - 1.65\sqrt{\frac{0{,}2.0{,}8}{250} + \frac{0{,}07.0.93}{500}} \leq (\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2) \leq (0{,}20 - 0{,}07) + 1{,}65\sqrt{\frac{0{,}2.0{,}8}{250} + \frac{0{,}07.0.93}{500}}$$

$$0{,}13 - 0{,}04 \leq (P_1 - P_2) \leq 0{,}13 + 0{,}04$$

$$0{,}09 \leq (P_1 - P_2) \leq 0{,}17$$

ومنه مجال الثقة 90% للفرق بين نسبتي المجتمعين ينتمي للمجال: [0,17 – 0,09]