Exercice : Théorie de Landau

1. L'enthalpie libre (ou tout autre potentiel thermodynamique) est minimum pour $\eta = 0$ pour toute $\boldsymbol{T > T_c}$. La stabilité de cet équilibre impose que : $\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}\right)_{T>T_c,p} > 0 \ (1)$

   Pour $\boldsymbol{T < T_c}$, la phase de plus haute symétrie est instable. Cette condition d'instabilité s'écrit
   $\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}\right)_{T>T_c,p} < 0 \quad (2)$

   Que se passe à la température de l'équilibre stable T_c ?

2. Nous voulons comprendre la transition au voisinage immédiat de la température critique, c.à.d. pour des petites valeurs de $|\boldsymbol{\eta}|$. Quelle est dans ce cas la meilleure manière d'écrire le potentiel thermodynamique ?
   On écrit le développement en fonction de paramètres qu'on nommera $\boldsymbol{g_i}$.
3. Pour le développement de l'enthalpie libre **g**, on se limitera au 4$^{\text{ème}}$ ordre en $\boldsymbol{\eta}$. On cherche maintenant à exprimer les paramètres $\boldsymbol{g_i}$. Déterminer ces paramètres.
4. Quelle sont les conditions pour que l'équilibre soit stable ?
5. Le modèle proposé par Landau représente l'existence d'une transition de phase pour $\boldsymbol{T = T_c}$. Il tient compte du fait qu'au-dessous de la température critique $\boldsymbol{T_c}$, la phase de basse symétrie est stable, tandis que la phase de haute symétrie est instable. Par contre, au-dessus de $\boldsymbol{T_c}$, seule la phase de haute symétrie est stable. Représentez l'allure des graphes de $\boldsymbol{g - g_0}$ pour diverses températures.
6. Pourquoi la théorie de Landau ne permet pas de rendre compte de manière satisfaisante des transitions de phase du 1$^{\text{er}}$ ordre ?

EXERCICE : Modèle d'Ising

On peut caractériser une configuration du système de spins par son aimantation

$$\boldsymbol{M = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\langle S_i\rangle}$$

L'aimantation $\boldsymbol{M}$ est un paramètre d'ordre.
En l'absence de champ, $\boldsymbol{M = 0}$ dans la phase paramagnétique haute température et $\boldsymbol{M \neq 0}$ dans la phase ferromagnétique basse température.
L'énergie d'une configuration

$$\boldsymbol{U = -J\sum_{i.i} S_i S_j = -\sum_{i} S_i.\left(J\sum_{i} S_j\right) = -NJM^2}$$

où on a implicitement remplacé $\boldsymbol{J}$ par $\mathbf{J/N}$ pour garder l'extensivité de $\boldsymbol{U}$

1. Evaluez le nombre de configuration d'aimantation $\boldsymbol{M}$ donnée. Et déterminez l'entropie.
2. Déduisez l'énergie libre.
3. Déterminer la température de transition en fonction de l'aimantation M.
4. Montrez qu'on peut mettre l'équation précédente sous la forme :
$$M = tanh\left(M\frac{T_c}{T}\right)$$
5. Résolvez graphiquement cette dernière équation. Pour cela déterminez l'équation d'autocohérence près de $\boldsymbol{T_c}$ (donc lorsque M tend vers 0).
6. Donnez l'énergie libre au voisinage de $\boldsymbol{T_c}$.