République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 1945-Guelma
Faculté Des Sciences Économiques, Commerciales Et Sciences De Gestion

Notions de base sur les matrices destiné principalement aux étudiants de T.C première année L.M.D

(2^{eme}−semestre 2020/2021).

Présenté par Dr. Azzedine KHENICHE.

Contents

1 Matrices **1**

1.1 Matrice associée à une application linéaire 1

1.2 Matrices : définitions, opérations 2

1.3 Matrices particulières 3

1.4 Opérations sur les matrices 4

1.5 Trace et déterminant d'une matrice 7

1.6 Inverse d'une matrice 9

1.7 Quelques matrices particuliéres 11

1.7.1 Matrice symètrique et antisymétrique 11

1 Matrices

1.1. Matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de type fini sur un même corps K. Soit p la dimension de E et $(e_1, ..., e_p)$ une base de E. Soit n la dimension de F et $(v_1, ..., v_n)$ une base de F. Soit f une application linéaire de E dans F.

L´étude des propriétés des applications linéaires entre deux espaces de type fini permet daffirmer que :

- l´application linéaire est déterminée de façon unique par limage dune base de E, donc par les vecteurs $f(e_1), f(e_2), ...f(e_p)$.

- Si j est un entier compris entre 1 et p, $f(e_j)$ est un vecteur de F et s´écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $B_F = (v_1, v_2, ..., v_3)$ de F.

- Il existe n scalaires uniques $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}$ tels que

$$f(e_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + ... + a_{nj}v_n$$

Donc, l´application linéaire est entièrement déterminée par les coefficients $(a_{ij})_{(i,j)\in[1,n]\times[1,p]}$
Il est donc naturel d´introduire la définition suivante :

Définition 1.1. *On appelle matrice associée à lapplication linéaire f par rapport aux bases B_E et B_F, la matrice à n lignes et p colonnes dont la $j-i$ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $B_F = (v_1, v_2, ..., v_n)$ à savoir:*

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

De ce fait, la matrice associée à l´application f relativement aux bases B_E et B_F

qu´on note $M_f(B_E, B_F)$ est donnée par :

$$M_f(B_E, B_F) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.1. *Soit f l´application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par*
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, x + z)$
Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (v_1, v_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminons la matrice associée à f dans les bases (e_1, e_2, e_3) et (v_1, v_2).
On a: $f(e_1) = (1, 1) = v_1 + v_2$, La première colonne de la matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même, on a: $f(e_2) = (1, 0) = v_1$, La deuxième colonne de la matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Enfin on a: $f(e_3) = (0, 1) = v_2$, La troisième colonne de la matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que

$$M_f((e_1, e_2, e_3), (v_1, v_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Matrices : définitions, opérations

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d´un certain nombre de problêmes d´algèbre linéaire se ramènent à des manipulations sur les matrices. Cela est vrai pour la résolution des sytèmes linéaires.
Nous nous plaçons dans le corps $\mathbb{R}$.

Définition 1.2. *Soient m et n deux entiers strictement positifs. On appelle matrice à m lignes et n colones à coeficients dans le corps $\mathbb{R}$, un ensemble A de $m \times n$ scalaires a_{ij}, $i = 1, ..., m$, $\quad j = 1, ..., n$ noté $A = (a_{ij})$, présentés dans le tableau* *rectangulaire suivant:*

$$(A) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les scalaires $a_{ij},\ \ i = 1, ..., m,\ \ j = 1, ..., n$ sont appelées coefficients ou élèments de la matrice A, le premier indice i étant celui de la ligne et le second j étant celui de la colonne. Ainsi l'ensemble des coefficients:

- $a_{i1}, ..., a_{in}$ est la i^{ieme} ligne de la matrice.
- $a_{1j}, ..., a_{mj}$ est la j^{ieme} colonne de la matrice.

Les élèments d'une matrice $(A)_{ij}$ sont notés aussi par a_{ij} (lorsque qu'aucune confusion ou ambiguitè n'est possible). On note $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes dont les coefficient appartiennent à $\mathbb{R}$. Si $m = n$, la matrice est dite carrée d'ordre n et on note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble correspondant, lorsque $m \neq n$, on parle de matrice rectangulaire.
On appelle diagonale d'une matrice carrée$A = (a_{ij})$ d'ordre n l'ensemble des coefficientes $a_{ii},\ \ i = 1, ..., n.$ Cette diagonale divise la matrice en une partie sur-diagonale composée des élèments dont l'indice de ligne est strictement inférieur à l'indice de colonne et une partie sous-diagonale formée des élèments pour les quels l'indice de ligne est strictement supérieur à l'indice de colonne. Étant donné $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $A^T \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, la matrice transposée de A telle que:

- $(A^T)_{ij} = (A)_{ji},\ \ 1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq j \leq m.$ On a alors $(A^T)^T = A.$

On appelle vecteur ligne (resp., vecteur colonne), une matrice n´ayant qu´une ligne (resp., vecteur colonne).

1.3. Matrices particulières

- Les matrices colonnes sont les matrices à une colonne
- Les matrices lignes sont les matrices à une ligne
- La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note 0_{np} si elle a n lignes et p colonnes, 0 sil ny a pas dambiguïté.
- Les matrices carrées sont les matrices dont les nombres de lignes et de colonnes sont égaux. Ce nombre de lignes et de colonnes sappelle lordre

de la matrice. Les coefficients ayant même indice de ligne et de colonne sappellent les coefficients diagonaux.

- Les matrices triangulaires inférieures sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale (cest-à-dire dindices ij avec $j > i$) sont nuls.
- Les matrices triangulaires supérieures sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessous de la diagonale (cest-à-dire dindices ij avec $j < i$) sont nuls.
- Les matrices diagonales sont les matrices carrées ‘a la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures. Les seuls coefficients non nuls sont donc ceux de la diagonale.
- La matrice identité est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. On note I_n la matrice identité dordre n.

1.4. Opérations sur les matrices

On peut effectuer un certain nombre d´opérations simples sur les matrices. Nous définissons à présent quelques opération essontielles sur les matrices.

Définition 1.3. *(*Égalité de deux matrices*)*
Deux matrices A et B sont égales, ce quon note $A = B$ si

- *elles ont le même nombre de lignes ;*
- *elles ont le même nombre de colonnes ;*
- *les coefficients à la même position sont égaux.*

Autrement dit:
Si A et B sont deux matrices de $M_{m,n}(\mathbb{R})$, alors A égale à B si $a_{ij} = b_{ij}$, pour $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$.

Définition 1.4. *(*Somme de deux matrices*) Soit A et B deux matrices de $M_{m,n}(\mathbb{R})$. On appelle somme des matrices A et B la matrice C de $M_{m,n}(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont:*

- *$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$. L'élèment neutre pour la somme de matrices est la matrice nulle noté 0, dont les coefficients sont tous égaux à zéro, on rappelle que l'on a par ailleurs*
- *$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad \forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.*

Proposition 1.1. *Si A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$,*

- *laddition est associative :* $(A+B)+C = A+(B+C)$*;*
- *La matrice nulle à n lignes et p colonnes est un élément neutre pour laddition :* $A + 0_{np} = A$*;*
- *toute matrice admet un symétrique. En posant* $-A = (-a_{ij})_(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p,$ *on a:* $A + (-A) = 0_{np}$.
- *laddition est commutative :* $A+B = B+A$.

Définition 1.5. *(*multiplication d'une matrice par un scalaire*)*
Soit A une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ et λ un scalaire , le résultat de la multiplication de la matrice A par le scalaire λ
est la matrice C de $M_{m,n}(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, on a: $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Proposition 1.2. *Soit λ, μ deux élements de $\mathbb{R}$, A et B des matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, alors:*

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$*;*
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$*;*
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$*;*
- *laddition est commutative :* $A+B = B+A$.
- $1A = A$.

Définition 1.6. *(*produit de deux matrices*)*
Soit A une matrice de $M_{m,p}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $M_{p,n}(\mathbb{R})$, le produit des matrices A et B est la matrice C de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnée par $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1..., n$.

Remarque 1.1. *On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :*
.

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{ij}b_{jk} + ... + a_{ip}b_{pk}$$

Exemple 1.2. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.2. *Deux erreurs grossières à éviter. Les règles du calcul des produits de matrices différent de celles des produits dans un corps par d´autres aspects.*

(i) *Si $AB = AC$, on ne peut pas simplifier par A pour en déduire que $B = C$. Cest faux en général.*

(ii) *Si $AB = 0$, on ne peut pas en déduire que soit $A = 0$ soit $B = 0$. Cest faux en général.*

(iii) *Comme la multiplication n´est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses. En particulier, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, mais bien $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.*

On a cependant:

Proposition 1.3. *(Calcul de $(A + B)^n$ lorsque $AB = BA$) Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$ tels que $AB = BA$. Alors, pour tout entier m, supérieur ou égal à 1, on a la formule*

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^{m-k} B^k$$

où C_m^k désigne le coefficient du binôme.
La démonstration se fait par récurrence en utilisant les propriétés bien connues du binôme.

le produit de matrices est associatif et distributif par rapport à la somme de matrices, mais il n'est pas commutatif en général. Dans le cas de matrices carrées, on dit que deux matrices A et B commutent si $AB = BA$. Toujours dans ce cas l'élèment neutre pour le produit de matrices d'ordre n est la matrice carrée appelée matrice identité définie par:

$$I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = j, \\ 0 & , \text{ si } non. \end{cases}$$

Cette matrice est, par définition la seul matrice d'ordre n telle que $AI_n = I_n A = A$ pour toute matrice A d'ordre n.
Si A est une matrice d'ordre n et p un entier, on définit la matrice A^p comme étant le produit de A par elle même répété p fois en posant $A^\circ = I_n$.
On rapelle enfin que l'on a

(i) $(AB)^T = B^T A^T$, $\forall A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$, $\forall B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$.

1.5. Trace et déterminant d'une matrice

Définition 1.7. *(***trace d'une matrice***)*
La trace d'une matrice A d'ordre n est la somme de ses coefficients diagonaux

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Les relations suivantes sont évidentes: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$:

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \;\; tr(AB) = tr(BA), \;\; tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$$

la seconde ayant comme conséquence le fait que la trace d'une matrice est invariant par changement de base. En effet, pour toute matrice A et tout matrice inversible P de même ordre, on a:

$$tr(PAP^{-1}) = tr(P^{-1}PA) = tr(A)$$

.

Définition 1.8. *Soit A une matrice d'ordre n et A_{ij} la matrice d'ordre $(n-1)$ obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A. On appelle mineur de A relatif à a_{ij} le déterminant $D_{ij} = detA_{ij}$. On appelle cofacteur de A relatif à a_{ij}, le nombre*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

.

Théoreme 1.1. *(**développement suivant une ligne ou une colonne**)*
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On a les formules suivantes:

- $\forall i$, $detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$, *(développement par rapport à la ligne i).*

- $\forall j$, $detA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$, *(développement par rapport à la colonne j).*

Démonstration.
Pour la formule de développement suivant une ligne il suffit de voir le théorème d´existence et d´unicité du déterminant. Comme $detA = detA^T$, on en déduit la formule de développement par rapport à une colonne.

Corollaire 1.1. *Désignons par $\delta_{n-1}(i,j)$ le déterminant de la matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$ extraite de A par suppression de la $i-eme$ ligne et de la*

$j-$eme colonne. Alors, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \delta_{n-1}(i,j)$$

Exemple 1.3. • *Considérons un déterminant 2×2:*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

On a $A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- *Le cas des déterminants 3×3 est plus compliqué:*

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

D´ou

$$detB = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

•Propriétés du déterminant:

- Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n. On a: $det(A \times B) = detA \times detB$.
- Soit A une matrice d'ordre n et A' la matrice obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A. Alors on a $detA' = -detA$.
- Soit A une matrice d'ordre n et A' la matrice obtenue en ajoutant à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A. Alors on a $detA' = detA$.
- Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes alors $detA = 0$.
- Si A est une matrice triangulaire supérieure ou inférieure, alors on a $detA = a_{11}a_{22}....a_{nn}$. Autrement dit, pour une matrice triangulaire, le déterminant est égal au produit des termes diagonaux.
- Si A est une matrices carrées d'ordre n, alors $det(A^T) = detA$.

Remarque 1.3. *Terminons cette section par deux avertissements:*

D'une part: $det(A+B) \neq detA + detB$

D'autre part: $det(\lambda \times A) \neq \lambda \times detA$, Ici il y a une formule simple. En effet:

$det(\lambda A) = det((\lambda In)A) = det(\lambda In)detA = \lambda^n detA.$

1.6. Inverse d'une matrice

Définition 1.9. *(***inverse d'une matrice***)*
Soit A une matrice d'ordre n, On dit que A est inversible ou régulière s'il existe une (unique) matrice notée A^{-1}, telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, (A^{-1} est alors applée la matrice inverse de A).

Une matrice non inversible est dite singulière. Il ressort de cette définition qu'une matrice A inversible est la matrice d'un endomorfisme bijectif. Par conséquent, une matrice A d'ordre n est inversible si et seulement si $rg(A) = n$.
Si une matrice A est inversible, son inverse est évidemment inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$. On rappelle par ailleurs que, si A et B sont deux matrices inversibles, on a les égalités suivantes:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

et

$$(\alpha A)^{-1} = (1/\alpha) \times A^{-1} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}^*$$

.

Proposition 1.4. *Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients reels. Les propositions suivantes sont équivalentes (on note X une matrice colonne à n éléments dans R :*

- *A est inversible;*
- *le déterminant de A est non nul. De plus si A est inversible, alors $det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$.*
- *le rang de A est égal à n;*
- *le système linéaire homogène $AX = 0$ a pour seule solution $X = 0$;*
- *les colonnes de A, considérées comme des vecteurs de R^n, sont linéairement indépendantes;*
- *la matrice A est inversible à gauche, c'est-à-dire qu'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que $BA = I_n$;*
- *la matrice A est inversible à droite, c'est-à-dire qu'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que $AB = I_n$;*
- *la transposée A^t de A est inversible;*

• Expression de l'inverse d'une matrice à l'aide du déterminant:
Soit A une matrice carrér d'ordre n. On introduit la matrice de ces cofacteurs: $cofA = (C_{ij})$ avec $C_{ij} = (-1)^{i+j} detD_{ij}$.

Théoreme 1.2. *Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{detA} \times (cofA)^T$.*

Preuve: Exercice.

Définition 1.10. *Le rang d'une matrice est le nombre maximum de vecteurs colonnes linéairement indépendants, et est noté $rg(A)$.*

Théoreme 1.3. *Le rang d'une matrice M est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice carrée dordre r extraite de M de déterminant non nul.*

Preuve: Exercice.

Exemple 1.4. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $A^{-1} = \frac{1}{detA} \times (cofA)^T$ et $detA = 2$ avec:

$$cofA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

et

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

=-1 et

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

=1 et

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

on trouve enfin la matrice inverse comme suite

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

1.7. Quelques matrices particuliéres

1.7.1. Matrice symètrique et antisymétrique

Notons $M_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.

Définition 1.11. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est:*

(i) symétrique, si $A = A^T$,

(ii) antisymétrique si $A = -A^T$,

Définition 1.12. *(***matrice diagonale***)*
Une matrice A d'ordre n est dite diagonale, si on a $a_{ij} = 0$, pour les couples d'indices $(i, j) \in 1, ..., n^2$ tels que $i \neq j$

Lemme 1.1.

- *La somme et le produit de deux matrices diagonales sont des matrices diagonales.*
- *le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses élèments diagonaux.*
- *Une matrice diagonale A est donc inversible si et selement si tous ses élèments diagonaux son non nuls et dans ce cas, son inverse est une matrice diagonale dont les élèments diagonaux sont les unverses des élèments diagonaux correspondants de A.*

Les matrices triangulaires forment une classe de matrices intervenant trés couramment en algèbre linéaire numérique.

Définition 1.13. *(***matrice triangulaire***)*
On dit qu'une matrice A d'ordre n est triangulaire supérieure (resp.inférieure) si on a:
$a_{ij} = 0$, pour les couples d'indices $(i, j) \in 1, ..., n^2$ tels que $i > j$(resp.$i < j$).

Une matrice à la fois triangulaire supérieure et inférieure est une matrice diagonale, et que la matrice transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure, et vice versa(évident).

Lemme 1.2. *Soit A une matrice d'ordre n triangulaire supérieure (resp. inférieure). Son déterminant est égal au produit de ses termes diagonaux et elle est donc inversible si et seulement si ces derniers sont tous sont non nuls. Dans ce cas, son inverse est aussi une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les élments diagonaux sont les inverses des élments diagonaux de A. Soit B une autre matrice d'ordre n triangulaire supérieure (resp. inférieure). La somme $A + B$ et le produit AB sont des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) dont les élments diagonaux sont respectivement la somme et le produit des élments diagonaux correspondants de A et B.*