فصل تمهيدي: التحليل التوفيقي (طرق العد) Analyse combinatoire

1- تذكير

تعريف عملية العاملي (Factoriel)

مثال

إذا أردنا حساب الجداء $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ فإننا سنعطيه رمز يكون على النحو $5!$ و نقرأ "عاملي 5"

نتيجة: بإمكاننا أن نكتب $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4!$

بصفة عامة: إذا كان n عدد طبيعي غير معدوم، فإن:

$$n! = (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1$$

و منه، يمكن التعميم:

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

$$(2n+1)! = (2n+1) \times (2n) \times (2n-1)!$$

ملاحظة: نقبل أن $0! = 1$

أمثلة على العاملي: المطلوب تبسيط العبارات التالية

$$a = \frac{8!}{6!} = ? \qquad b = \frac{2}{5!} - \frac{2}{4!} + \frac{2}{3!} = ? \qquad c = \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n+1)!} = ?$$

$$a = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$$

$$b = \frac{2}{5!} - \frac{2}{4!} + \frac{2}{3!} = \frac{2}{5!} - \frac{2 \times (5)}{5 \times 4!} + \frac{2 \times (5 \times 4)}{(5 \times 4) \times 3!} = \frac{2 - 10 + 40}{5!} = \frac{32}{5!} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$

$$c = \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{(2n+1)! + (2n-1)!}{(2n-1)! \times (2n+1)!}$$

$$= \frac{(2n+1) \times (2n) \times (2n-1)! + (2n-1)!}{(2n-1)! \times (2n+1)!}$$

$$= \frac{(2n-1)! \times [(2n+1) \times (2n) + 1]}{(2n-1)! \times (2n+1)!}$$

$$= \frac{(2n+1) \times (2n) + 1}{(2n+1)!}$$

2- التحليل التوفيقي

يعتبر التحليل التوفيقي أداة من أدوات حساب ما يسمى بالاحتمالات، بحيث لحساب هذه الأخيرة، كثيرا ما نحتاج إلى ما يسمى إحصاء عدد الحالات أو عدد الامكانيات أو عدد الطرق. و عليه، فإن التحليل التوفيقي يهدف إلى حساب مختلف الطرق التي يمكن من خلالها ترتيب عناصر مجموعة معينة، و تختلف الحلول عندئذ باختلاف الحالات التي يمكن مواجهتها و هي على النحو التالي:

- أخذ عناصر المجموعة ككل أو عينة فقط
- حالة تكرار عنصر من عناصر المجموعة (سحب بإرجاع)
- حالة عدم تكرار عنصر من عناصر المجموعة (سحب بدون إرجاع)

و فيما يلي أهم طرق العد:

☜ المبدأ الأساسي في العد

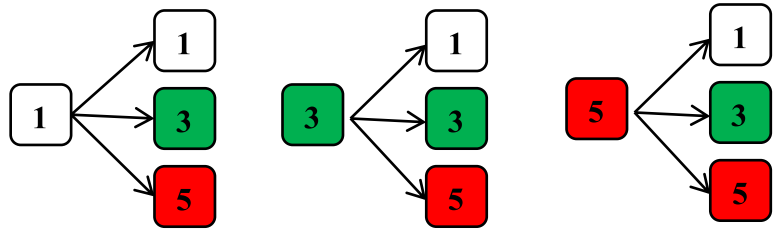
عند القيام بتجربة ما بـ n_1 طريقة مختلفة، ثم تتلوها تجربة ثانية يمكن إجرائها ب n_2 طريقة ثم ثالثة بـ n_3 طريقة و هكذا، فإن العمليات معا يمكن إجرائها بـ $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_n$

مثال 1

لنعتبر مجموعة الأعداد الطبيعية E، حيث:

$$E = \{1, 3, 5\}$$

و نريد تشكيل مجموعات جزئية مشكلة من **رقمين** مأخوذين من المجموعة E. في هذه الحالة يكون لدينا:



يمكن ملاحظة أنه هناك 3 امكانيات لاختيار الرقم الأول، و 3 إمكانيات للاختيار الرقم الثاني. و منه، فعدد المجموعات الجزئية هو 3 للرقم الأول و 3 للرقم الثاني، و نكتب:

$$3 \times 3 = 3^2 = 9$$

مثال 2

- عند رمي قطعة نقود، فإن نتائج التجربة تكون على النحو: $A = \{P, F\}$
- عند رمي حجر نرد، فإن نتائج التجربة هي من الشكل: $B = \{1,2,3,4,5,6\}$
- عند رميهما معا، فإن نتائج التجربة تكون على شكل ثنائيات يمكن معرفة عددها بإتباع المبدأ الأساسي للعد بحيث: $n_A = 2 , n_B = 6$

و عليه: $n_A \times n_B = 12$

$$C = \underbrace{\{(P,1), \dots, (P,6), (F,1), \dots, (F,6)\}}_{\text{12 ثنائية}}$$

مثال 3

كم عدد لوحات السيارات التي يمكن الحصول عليها من استعمال حرفين من الأحرف الهجائية و 3 أرقام إلى يسار هذه الأحرف مع:

- جواز تكرار الحرف و الرقم

$$28 \times 28 \times 10 \times 10 \times 10 = 784000 \text{ لوحة}$$

- عدم جواز تكرار الحرف و الرقم

$$28 \times 27 \times 10 \times 9 \times 8 = 544320 \text{ لوحة}$$

- جواز تكرار الحرف و عدم تكرار الرقم

$$28 \times 28 \times 10 \times 9 \times 8 = 564480 \text{ لوحة}$$

- لا يكون الرقم الأول صفر '0' و الحرفين مختلفين

$$28 \times 27 \times 9 \times 10 \times 10 = 680400 \text{ لوحة}$$

☜ التبديلات Les Permutations

لتكن لدينا مجموعة مكونة من n عنصر **معلوم** و **مختلف**، و نريد اختيار **كافة** هذه العناصر لتشكيل مجموعات مختلفة، فعندها نصبح بصدد الحديث عن التبديلات التي يمكن التمييز فيها بين حالتين:

- **التبديلات بدون تكرار:** نسمي تبديلة بدون تكرار لـ n عنصر مختلف، كل قائمة ذات n عنصر(تؤخذ كافة العناصر) بحيث كل عنصر يظهر في **ترتيب معين مرة واحدة**. و بالتالي، إذا تغير عنصرين أو أكثر فهذا يعطينا تبديلة جديدة. و يمكن القيام بهذه العملية عددا من المرات يقدر بالعبارة التالية:

$$\boldsymbol{P_n = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 1 = n!}$$

مثال

بكم طريقة يمكن تكوين عدد من 5 أرقام بالاعتماد على الأرقام التالية: 1، 3، 4، 6، 8

$$P_n = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$$

هذا يعني أنه يمكن تشكيل 120 عدد مختلف مشكل من 5 أرقام (عدد العناصر المختارة) تم اختيارها من 5 أرقام (عدد العناصر المتوفرة) بحيث ترتيب كل رقم يعطينا عددا معينا و لا يظهر الرقم إلا مرة واحدة فقط (الترتيب مهم و لا وجود للتكرار)

$$\left.\begin{matrix} 13468 \\ 14386 \\ 16384 \\ \vdots \end{matrix}\right\} \text{120 عدد مختلف}$$

- **التبديلات بتكرار:** لتكن لدينا مجموعة مكونة من n عنصر و مقسمة إلى مجموعات جزئية تحتوي كل منها على عناصر متشابهة فيما بينها و مختلفة عن عناصر المجموعات الجزئية الأخرى

$$\underbrace{(\boldsymbol{a, a, \dots a})}_{\boldsymbol{\alpha}\text{ مرة}} , \underbrace{(\boldsymbol{b, b, \dots b})}_{\boldsymbol{\beta}\text{ مرة}} , \dots , \underbrace{(\boldsymbol{z, z, \dots z})}_{\boldsymbol{\gamma}\text{ مرة}}$$

حيث: $\boldsymbol{n = \alpha + \beta + \dots + \gamma}$

نعبر عن التبديلة في هذه الحالة بالعبارة الرياضية التالية:

$$\boldsymbol{\widetilde{P_n} = \frac{n!}{\alpha! \times \beta! \times \dots \times \gamma!}}$$

مثال

ما هو عدد التبديلات الممكن تكوينها من كلمة RECHERCHE

$$\underbrace{(R,R)}_{\text{2 مرة}},\underbrace{(E,E,E)}_{\text{3 مرات}},\underbrace{(C,C)}_{\text{2 مرة}},\underbrace{(H,H)}_{\text{2 مرة}}$$

$$\widetilde{P_n}=\frac{9!}{2!\times 3!\times 2!\times 2!}=7560 \text{ تبديلة}$$

هذا يعني أنه يمكن تشكيل 7560 كلمة مختلفة (بمعنى أو بدون معنى) تتكون من 9 أحرف مع امكانية تكرار نفس الحرف أكثر من مرة

$$7560 \text{ كلمة مختلفة} \begin{cases} RECHERCHE \\ CHERCHERE \\ CHERECHER \\ \vdots \end{cases}$$

الترتيبات Les Arrangements

لتكن لدينا مجموعة مكونة من n عنصر و نريد اختيار r عنصر من بين هذه العناصر **بترتيب معين**، فنكون هنا بصدد الحديث عن الترتيبات التي نميز فيها كذلك بين حالتين:

- **الترتيبات بدون تكرار:** يمكن اختيار r عنصر **مرتب** (الترتيب مهم) و **مختلف** (بدون تكرار) من بين n عنصر بالطريقة التالية:

$$A_n^r=n(n-1)\dots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

r: عدد العناصر المختارة n: عدد العناصر المتوفرة

مثال1

خلال تظاهرة رياضية شارك فيها 18 متنافسا، نقوم بمنح ميداليات ذهبية، فضية و برونزية للفائزين عند اعتلاء المنصة. بكم طريقة يمكن اختيار هؤلاء المتوجين

$$A_{18}^3=\frac{18!}{(18-3)!}=\frac{18!}{15!}=\frac{18\times 17\times 16\times 15!}{15!}=18\times 17\times 16=4896$$

هذا يعني أن هناك 4896 طريقة لاختيار 3 متوجين من أصل 18 متنافسا، بحيث يكون هذا الاختيار بطبيعة الحال للفائزين الثلاثة الأوائل (الترتيب مهم) مع ملاحظة أنه لا يمكن تتويج نفس المنافس بميداليتين مختلفتين (عدم وجود تكرار)

مثال2

في عملية انتخاب لاختيار رئيس، نائب رئيس و أمين المال لجمعية ما، ترشح 5 أشخاص. فبكم طريقة يمكن اختيار هؤلاء الأعضاء

$$A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=5\times 4\times 3=60$$

- **الترتيبات بتكرار:** يمكن اختيار r عنصر من بين n عنصر مع إمكانية تكرار نفس العنصر أكثر من مرة بالطريقة التالية:

$$\widetilde{A_n^r}=\underbrace{n\times n\times\dots\times n}_{r \text{ مرة}}=n^r$$

مثال

بكم طريقة يمكن تكوين كلمات من 3 حروف انطلاقا من كلمة MERCI بحيث يمكن تكرار نفس الحرف أكثر من مرة

بما أننا نريد تشكيل كلمات مختلفة من 3 حروف مع امكانية تكرار نفس الحرف أكثر من مرة، فيصبح لدينا 5 إمكانيات لاختيار الحرف الأول و 5 امكانيات لاختيار الحرف الثاني و 5 إمكانيات لاختيار الحرف الثالث. و منه:

$$\widetilde{A_5^3}=5\times 5\times 5=5^3=125$$

أي لدينا 125 امكانية لتشكيل كلمات من 3 حروف بحيث يكون الترتيب مهما و يمكن تكرارا الحرف أكثر من مرة

حالة خاصة

كل ترتيبة بدون تكرار لـ n عنصر من بين n عنصر تسمى كذلك تبديلة لـ n عنصر، بمعنى آخر أنه عندما يكون $r=n$ فإن:

$$A_n^n=\frac{n!}{0!}=\frac{n!}{1}=n!=P_n$$

ملاحظات

1- في حالة عدم وجود تكرار فإن: $0\le r\le n$ مما يعني أنه لا يمكن أن نختار أكثر مما لدينا

2- $A_n^r<\widetilde{A_n^r}$ إلا عندما r = 1 فإن: $A_n^1=\widetilde{A_n^1}=n$

التوفيقات Les Combinaisons

لتكن لدينا مجموعة مكونة من n عنصر و نريد اختيار r عنصر من بين هذه العناصر بدون الأخذ بعين الاعتبار ترتيب هذه العناصر، نكون بصدد الحديث عن التوفيقات التي يمكن التمييز فيها بدورها بين:

- **التوفيقات بدون تكرار:** يمكن اختيار r عنصر من أصل n عنصر بالطريقة التالية:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{A_n^r}{r!}$$

مثال

في عملية انتخاب لاختيار 3 أعضاء لتمثيل جمعية ما، ترشح 5 أشخاص من هذه الجمعية. فبكم طريقة يمكن اختيار هؤلاء الأعضاء

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

هذا يعني أن هناك 10 امكانيات لاختيار 3 أعضاء **عشوائيا** من بين الـ 5 مترشحين بحيث **لا يوجد تكرار** و ترتيب العضو في التشكيلة **غير مهم**

- **التوفيقات بتكرار:** يمكن اختيار r عنصر من أصل n عنصر مع إمكانية تكرار نفس العنصر أكثر من مرة بالطريقة التالية:

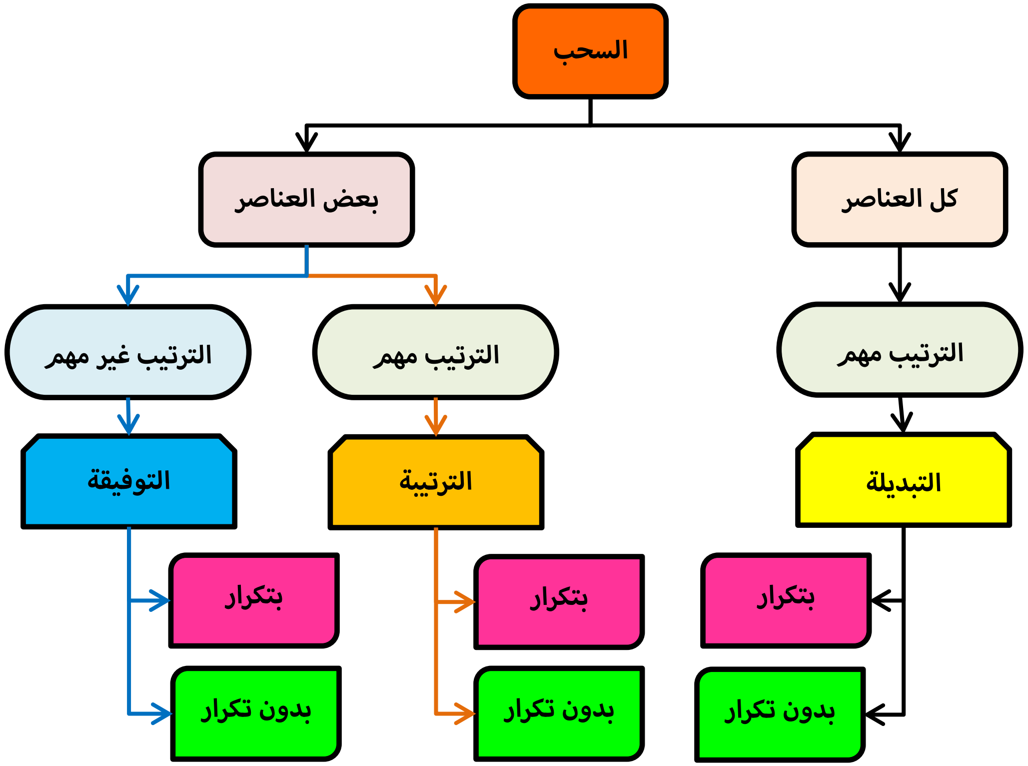
$$\widetilde{C_n^r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!} = C_{n+r-1}^r$$

ملاحظة

- $C_n^r < \widetilde{C_n^r}$ إلا عندما $r = 1$ فإن: $C_n^1 = \widetilde{C_n^1} = n$

خواص

$C_n^0 = C_n^n = 1$	$C_n^1 = n$	$C_{n+1}^n = n+1$	$C_n^{n-1} = n$	$C_n^r = C_n^{n-r}$



بعض أنواع السحب

نسحب r عنصر من بين n عنصر $(r \leq n)$، فنلخص النتائج في الجدول التالي:

	عدد السحب الممكن	الترتيب
السحب في آن واحد (آني)	C_n^r	غير مهم
السحب على التوالي (بالتتابع) بدون تكرار (إرجاع أو إحلال)	A_n^r	مهم
السحب على التوالي (بالتتابع) بتكرار (إرجاع أو إحلال)	n^r	مهم

مثال توضيحي

لتكن لدينا المجموعة التالية $\Omega = \{a, b, c\}$ و أردنا اختيار عنصرين من هذه المجموعة،

فيصبح لدينا:

في حالة الترتيبات بدون تكرار ($n = 3, r = 2$)

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$
$$S = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$$

في حالة الترتيبات مع التكرار

$$\widetilde{A_3^2} = 3^2 = 9$$
$$S = \{(a,a)(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

في حالة التوفيقات بدون تكرار

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$$
$$S = \{(a,b),(a,c),(b,c)\}$$

في حالة التوفيقات مع التكرار

$$\widetilde{C_3^2} = \frac{(3+2-1)!}{2!\,2!} = 6$$
$$S = \{(a,a)(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$$