

Sémantique – signification

- ▶ Nous savons comment lire et écrire les formules. Mais quelle est leur signification ?
 - ▶ ou de manière plus chic : quelle est leur *sémantique* ?
 - ▶ Les connecteurs booléens (non $\neg$, et $\wedge$, ou $\vee$, si-alors $\rightarrow$, si et seulement si $\leftrightarrow$) ont à peu près leur signification en français.
 - ▶ Mais le français est un langage naturel, plein d'ambiguïtés, de subtilités, et de cas particuliers.
 - ▶ Traduire du français à la logique est difficile !
-
- ▶ Nous sommes des informaticien(ne)s. On a besoin d'une idée précise de la signification des formules – d'autant plus qu'il en existe un nombre infini.
 - ▶ Donc, on préfère donner une définition formelle en style mathématique de la sémantique.

Sémantique de la logique propositionnelle

But : donner une signification aux connecteurs logiques, et *interpréter* les variables propositionnelles, en leur attribuant une valeur booléenne (*vraie* ou *fausse*), afin de permettre de déterminer la vérité d'une formule complexe à partir de celle des formules atomiques qui la composent.

Donner de la signification aux formules

Une interprétation est simplement quelque chose qui détermine si chaque atome propositionnel est vrai ou faux.

Definition (Interprétation)

Une **interprétation** $\mathcal{I}$ pour un ensemble de variables propositionnelles P est une fonction $\mathcal{I} : P \rightarrow \text{BOOL}$, ou $\text{BOOL} = \{V, F\}$.

- ▶ Pour les tests conditionnels une interprétation est un point dans l'exécution d'un programme.
- ▶ les valeurs courantes du programme déterminent si chaque énoncé atomique d'un test conditionnel (par exemple, $x > 0$, $x = y$, etc.) est vrai ou faux.
- ▶ Pour "si (il pleut)) alors (il est nuageux)", une interprétation est le temps atmosphérique.
- ▶ Pour des atomes $p, q, \dots$, une interprétation spécifie juste quels atomes sont vrais et quels sont faux.
- ▶ *N'oubliez pas* : on peut avoir plusieurs interprétations différentes. Dans une autre interprétation les valeurs de vérité peuvent être différentes !
- ▶ Evidemment, si on connaît l'interprétation, on peut dériver la signification de chaque formule propositionnelle donnée – c.à.d., si elle est vraie ou fausse dans l'interprétation.
- ▶ On procède des formules simples aux formules plus complexes.

Déterminer la Valeur de Vérité

La valeur de vérité d'une formule propositionnelle pour une interprétation donnée est définie comme il suit :

- ▶ l'interprétation nous dit directement la valeur de vérité des atomes.
 - ▶ $\top$ est vrai et $\perp$ est faux.
- ▶ Supposez que A et B sont des formules et qu'on a déjà établi si elles sont vraies ou fausses pour l'interprétation donnée. Alors, pour cette interprétation :
 - ▶ $\neg A$ est vraie si A est fausse, et fausse si A est vraie
 - ▶ $A \wedge B$ est vrai si A et B sont toutes les deux vraies, si non elle est fausse.
 - ▶ $A \vee B$ est vrai si l'une des A ou B est vraie, si non elle est fausse (ou inclusif)
 - ▶ $A \rightarrow B$ est vrai si A est fausse ou B est vraie (ou les deux), si non elle est fausse ("si A est vraie, alors B est vraie aussi")
 - ▶ $A \leftrightarrow B$ est vrai si A et B ont la même valeur de vérité (toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses), si non elle est fausse

Sémantique de la logique propositionnelle

Notation : si E est un ensemble et $n \in \mathbb{N}, n > 0$, on note E^n l'ensemble de toutes les n -uplets de E .

Definition (Fonction booléenne)

Soit $\text{BOOL} = \{V, F\}$ l'ensemble dont les éléments sont V (Vrai) et F (Faux)(ou 1 et 0).

Une **fonction booléenne** à n arguments (dite aussi “fonction de vérité”) est une fonction $f : \text{BOOL}^n \rightarrow \text{BOOL}$.

Fonction booléennes

Definition

Les fonctions booléennes $f_{\neg}$, $f_{\wedge}$, $f_{\vee}$, $f_{\rightarrow}$, $f_{\leftrightarrow}$ sont définies par les tables suivantes, où l'argument de la fonction unaire $f_{\neg}$ est indiqué dans la première colonne :

Argument 1	Argument 2	$f_{\neg}$	$f_{\vee}$	$f_{\wedge}$	$f_{\rightarrow}$	$f_{\leftrightarrow}$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Quelle est la différence entre un connecteur c et la fonction booléen f_c ?

Sémantique de la logique propositionnelle

Definition (Valeur de vérité)

La **valeur de vérité** d'une formule A par rapport à une interprétation $\mathcal{I}$, notée $[A]_{\mathcal{I}}$, est définie par récurrence sur la structure de A :

- ▶ Si A est une lettre propositionnelle, $[A]_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}(A)$
De plus, $[\top]_{\mathcal{I}} = V$ et $[\perp]_{\mathcal{I}} = F$
- ▶ $[\neg A_1]_{\mathcal{I}} = f_{\neg}([A_1]_{\mathcal{I}})$
- ▶ $[A_1 * A_2]_{\mathcal{I}} = f_*([A_1]_{\mathcal{I}}, [A_2]_{\mathcal{I}})$
où $*$ est un connecteur binaire et f_* est la fonction booléenne associée.

Tables de vérité

L' évaluation d'une formule par rapport à une interprétation $\mathcal{I}$ donnée peut être représentée sous la forme d'une ligne d'une **table de vérité** :

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg \neg q$	$(p \vee \neg q) \wedge (\neg \neg q)$
V	F	V	V	F	F

Ici, les 2 premières colonnes indiquent l'interprétation $\mathcal{I}$ par rapport à laquelle on fait évaluation.

Sémantique de la logique propositionnelle

Definition (Modèle)

Une interprétation $\mathcal{I}$ est un **modèle** d'une formule A si $[A]_{\mathcal{I}} = V$.

On dit que $\mathcal{I}$ est un **modèle** d'un ensemble de formules E si elle est modèle de tout élément de E .

N.B. : si E est un ensemble fini $\{A_1, \dots, A_n\}$, alors $\mathcal{I}$ est un modèle de E ssi c'est un modèle de $(\dots (A_1 \wedge A_2) \dots) \wedge A_n$

Definition (Satisfiabilité)

Une formule A est **satisfiable** s'il existe au moins une interprétation $\mathcal{I}$ qui est modèle de A ; sinon, A est dite *insatisfiable*.

- ▶ Définition semblable pour un ensemble E de formules.
- ▶ *N.B.* : une formule A est satisfiable ssi pour au moins une ligne de sa table de vérité la valeur de A est V .
- ▶ Complexité dans le pire des cas du test de satisfiabilité pour A , en fonction du nombre de lettres propositionnelles de A ?

Sémantique de la logique propositionnelle

Definition (Validité)

Une formule A est **valide** (ou est une *tautologie*) si, pour n'importe quelle interprétation $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ est un modèle de A .

- ▶ *N.B.* : A est valide ssi toute ligne de sa table de vérité donne V comme sa valeur.
- ▶ Complexité du test de validité de A , en fonction du nombre de lettres propositionnelles de A ?

Sémantique de la logique propositionnelle

N.B. : si A est une formule, p_i une de ses lettres propositionnelles, et A' la formule obtenue à partir de A en remplaçant systématiquement p_i par une formule quelconque B , alors la validité de A implique celle de A' .

Attention : l'implication réciproque est fausse !

Exemple

- ▶ A_1 est $p \vee \neg p$.
En remplaçant p par $q \rightarrow r$ on obtient $A'_1 : (q \rightarrow r) \vee \neg(q \rightarrow r)$.
Puisque A est valide A' l'est aussi.
- ▶ A_2 est $p \vee q$.
En remplaçant p par $\neg q$ on obtient $A'_2 : \neg q \vee q$.
 A'_2 est valide, mais A_2 ne l'est pas.

Sémantique de la logique propositionnelle

Definition (Conséquence logique)

Soit E un ensemble quelconque de formules, soit A une formule.

On dit que A est **conséquence logique** de E , et on note $E \models A$, si tout modèle de E est aussi un modèle de A .

Et si $E = \emptyset$?

Analyse d'un raisonnement en langage naturel I

Je vous paierai pour votre réparation de mon PC seulement si mon PC marche.

Or, mon PC ne marche pas.

Donc, je ne vous paierai pas.

La conclusion *je ne vous paierai pas* suit des prémisses du raisonnement ?

Formalisons : p pour *je vous paierai pour votre réparation de mon PC*, m pour *mon PC marche*.

Prémisses : $p \rightarrow m, \neg m$

Conclusion : $\neg p$

Est-il vrai que $p \rightarrow m, \neg m \models \neg p$?

Analyse d'un raisonnement en langage naturel I

*Je vous paierai pour votre réparation de mon PC seulement si mon PC marche.
Or, mon PC ne marche pas.
Donc, je ne vous paierai pas.*

La conclusion *je ne vous paierai pas* suit des prémisses du raisonnement ?

Formalisons : p pour *je vous paierai pour votre réparation de mon PC*, m pour *mon PC marche*.

Prémisses : $p \rightarrow m, \neg m$

Conclusion : $\neg p$

Est-il vrai que $p \rightarrow m, \neg m \models \neg p$? **OUI**

La conclusion suit logiquement, raisonnement correct.

Analyse d'un raisonnement en langage naturel II

S'il pleut, alors je prends mon parapluie.

Mais, il ne pleut pas.

Donc, je ne prends pas le parapluie.

La conclusion *je ne prends pas le parapluie* suit des premisses du raisonnement ?

Formalisons : q pour *il pleut*, r pour *je prends le parapluie*.

Premisses : $q \rightarrow r, \neg q$

Conclusion : $\neg r$

Est-il vrai que $q \rightarrow r, \neg q \models \neg r$?

Analyse d'un raisonnement en langage naturel II

S'il pleut, alors je prends mon parapluie.

Mais, il ne pleut pas.

Donc, je ne prends pas le parapluie.

La conclusion *je ne prends pas le parapluie* suit des premisses du raisonnement ?

Formalisons : q pour *il pleut*, r pour *je prends le parapluie*.

Premises : $q \rightarrow r, \neg q$

Conclusion : $\neg r$

Est-il vrai que $q \rightarrow r, \neg q \models \neg r$? **NO**

La conclusion ne suit pas logiquement, raisonnement incorrect.

Résultats Fondamentaux

1. $A_1, \dots, A_n \models A$ si et seulement si la formule $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A$ est valide.
2. Si E est insatisfiable alors A est une conséquence logique de E .
3. Quel que soit E , si A est valide alors A est une conséquence logique de E .
4. $E \models A$ si et seulement si $E \cup \{\neg A\}$ est insatisfiable.
Donc, en considérant le cas où E est vide, A est valide si et seulement si $\neg A$ est insatisfiable.

NB : *Propriété 4 très utile dans la suite.*

Formules Equivalentes

Definition (Equivalence)

Soient A_1 et A_2 deux formules.

On dit que A_1 et A_2 sont **logiquement équivalentes** (et on note $A_1 \equiv A_2$) ssi

1. A_1 est une conséquence logique de A_2 , et
2. A_2 est une conséquence logique de A_1 ,

c.à.d., $A_2 \models A_1$ et $A_1 \models A_2$.

N.B. $A_1 \equiv A_2$ si et seulement si la formule composée $A_1 \leftrightarrow A_2$ est valide, ou, de façon équivalente, si et seulement si A_1 et A_2 reçoivent la même valeur de vérité pour toute interprétation.

- ▶ quelle est la différence entre $\rightarrow$ et $\models$?
- ▶ quelle est la différence entre $\leftrightarrow$ et $\equiv$?
- ▶ quel est le rapport entre la notion spécifique d'*équivalence logique* et la notion générale de relation d'équivalence ?

Equivalences utiles

Qu'es soient les formules A_1 , A_2 et A_3 :

- ▶ $A_1 \vee \neg A_1 \equiv \top$ (loi du tiers exclus)
- ▶ $A_1 \wedge \neg A_1 \equiv \perp$
- ▶ $A_1 \leftrightarrow A_2 \equiv (A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_1)$ (définissabilité de $\leftrightarrow$ par $\wedge, \rightarrow$)
- ▶ $A_1 \rightarrow A_2 \equiv \neg A_1 \vee A_2$ (définissabilité de $\rightarrow$ par $\neg, \vee$)
- ▶ $\neg(A_1 \wedge A_2) \equiv \neg A_1 \vee \neg A_2$ et $\neg(A_1 \vee A_2) \equiv \neg A_1 \wedge \neg A_2$ (lois de De Morgan)
- ▶ $\neg\neg A_1 \equiv A_1$ (loi de double négation)
- ▶ $A_1 \wedge A_2 \equiv A_2 \wedge A_1$ et $A_1 \vee A_2 \equiv A_2 \vee A_1$ (commutativité de $\wedge$, respectivement $\vee$)
- ▶ $A_1 \vee (A_2 \wedge A_3) \equiv (A_1 \vee A_2) \vee A_3$ et
 $A_1 \wedge (A_2 \vee A_3) \equiv (A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$ (associativité de $\wedge$, respectivement $\vee$)
- ▶ $A_1 \vee (A_2 \wedge A_3) \equiv (A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_3)$ et
 $A_1 \wedge (A_2 \vee A_3) \equiv (A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3)$ (lois de distributivité)
- ▶ $A_1 \vee \perp \equiv A_1$ et $A_1 \wedge \top \equiv A_1$ (éléments neutres)
- ▶ $A_1 \wedge \perp \equiv \perp$ et $A_1 \vee \top \equiv \top$
- ▶ $(A_1 \wedge A_2) \vee A_1 \equiv A_1$ et $(A_1 \vee A_2) \wedge A_1 \equiv A_1$

Remplacement

Theorem

Soient A une formule, B une sous-formule de A , et C une formule telle que $B \equiv C$.
Si on remplace une occurrence de B dans A par C , on obtient une formule A' telle que $A \equiv A'$.

Exemple de l'utilité de ce théorème

$$\begin{aligned} ((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \wedge \neg\neg r) \vee (p \wedge \neg\neg\neg p) &\equiv (\top \wedge r) \vee (p \wedge \neg p) \\ &\equiv (r \wedge \top) \vee \perp \\ &\equiv r \vee \perp \\ &\equiv r \end{aligned}$$

Possibilité de récrire une formule en une autre logiquement équivalente mais + simple ou ayant une forme donnée (formes *normales*).

Fonctions Booléennes

Outre $f_{\vee}$, $f_{\wedge}$, $f_{\rightarrow}$ et $f_{\leftrightarrow}$, d'autres fonctions booléennes à 2 arguments existent. Combien ?

Des fonctions booléennes à + que 2 arguments existent, par exemple celle définie par la table :

Argument 1	Argument 2	Argument 3	Valeur
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

Fonctions Booléennes

Est-il possible d'exprimer toute fonction booléenne à l'aide de $\top, \perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Definition

Soit A une formule dont les lettres propositionnelles sont $p_1, \dots, p_n$.

Soit f_A la fonction booléenne à n arguments telle que, quelque soit $v_i \in Bool$ et $\mathcal{I}$ telle que $\mathcal{I}(p_i) = v_i$, on a $f_A(v_1, \dots, v_n) = [A]_{\mathcal{I}}$.

On dit alors que la fonction f_A **est réalisée** par la formule A , ou, de façon équivalente, que A réalise f_A .

Example

La formule $A = \neg\neg\neg p_1$ réalise la fonction $f_{\neg}$. Pourquoi ?

Quelles autres formules réalisent $f_{\neg}$?

Réformulation de la question :

Est-il possible de réaliser toute fonction booléenne en utilisant des formules dont les seuls connecteurs sont : $\top, \perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Fonctions Booléennes

Est-il possible d'exprimer toute fonction booléenne à l'aide de $\top, \perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Definition

Soit A une formule dont les lettres propositionnelles sont $p_1, \dots, p_n$.

Soit f_A la fonction booléenne à n arguments telle que, quelque soit $v_i \in Bool$ et $\mathcal{I}$ telle que $\mathcal{I}(p_i) = v_i$, on a $f_A(v_1, \dots, v_n) = [A]_{\mathcal{I}}$.

On dit alors que la fonction f_A **est réalisée** par la formule A , ou, de façon équivalente, que A réalise f_A .

Example

La formule $A = \neg\neg\neg p_1$ réalise la fonction $f_{\neg}$. Pourquoi ?

Quelles autres formules réalisent $f_{\neg}$?

Réformulation de la question :

Est-il possible de réaliser toute fonction booléenne en utilisant des formules dont les seuls connecteurs sont : $\top, \perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$? **OUI**

Si la fonction a au moins 1 argument, même $\neg, \vee, \wedge$ suffisent.

Fonctions Booléennes

Idee de la démonstration

Argument 1	Argument 2	Argument 3	Valeur
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

Les lignes avec résultat *V* guident la construction d'une formule réalisant la fonction.
Cette formule est une disjonction de 4 sousformules : l_1 , l_2 , l_3 et l_4 :

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

Récriture d'une formule dans une forme normale logiquement équivalente

Conventions préliminaires.

1. Si $n = 0$, la notation $A_1 \vee \dots \vee A_n$, n'indique pas vraiment une formule, toutefois on pose qu'elle indique la formule $\perp$.
De même, si $n = 0$ la notation $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ indiquera $\top$.
2. Quand on parlera de formes normales, on écrira $A_1 \vee \dots \vee A_n$ pour indiquer une disjonction dont les composantes sont $A_1, \dots, A_n$, peu importe leur ordre et peu importe leur groupement par les $()$.
Idem pour $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$.

Récriture d'une formule dans une forme normale logiquement équivalente

Definition (Forme Normale de Négation)

Une formule est dite en **forme normale de négation (f.n.n.)** si toute occurrence du connecteur $\neg$ s'applique à des sous-formules atomiques.

Pour récrire A en une A' t.q. A' est en f.n.n. et $A \equiv A'$ utilisez :

- ▶ $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- ▶ $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- ▶ Les lois de De Morgan
- ▶ La loi de Double Négation

Récriture d'une formule dans une forme normale logiquement équivalente

Definition

- *rappel* : un **littéral** est ou bien une formule atomique ou bien la négation d'une formule atomique.
- *rappel* : une **clause** (dite aussi : *disjonction élémentaire*) est une formule de la forme $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_{m-1} \vee l_m$, où $m \geq 0$ et chaque l_i est un littéral.
Le littéral $\perp$ est dit *clause vide*.
- Une formule A est dite en **forme normale conjonctive (f.n.c.)** si elle est de la forme $D_1 \wedge \dots \wedge D_k$, où $k \geq 0$ et chaque D_i est une clause.
- une **conjonction élémentaire** est une formule de la forme $l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_{n-1} \wedge l_n$ où $n \geq 0$.
Le littéral $\top$ est dit **conjonction élémentaire vide**.
- une formule A est dite en **forme normale disjonctive (f.n.d.)** si elle est de la forme $C_1 \vee \dots \vee C_q$, où $q \geq 0$ et chaque C_i est une conjonction élémentaire.

Récriture d'une formule dans une forme normale logiquement équivalente

Theorem

Etant donnée une formule quelconque A :

- ▶ *il existe une formule A' qui est en f.n.c. et qui est logiquement équivalente à A ;*
- ▶ *il existe une formule A'' qui est en f.n.d. et qui est logiquement équivalente à A .*