

Logique des prédicats du premier ordre (LPO)

— ■ — ■ — ■ — ■ — ■ — ■ — ■ — ■ — ■ — ■ — ■ — ■ —

— ■ — ■ — ■ — ■ — ■ — ■ —

1 – Introduction

1 – 1 – Insuffisance de L. P

-
- ✱ Une proposition est prise comme un tout, elle est décrétée **VRAIE** ou **FAUSSE**. On dit rien sur son domaine d'application.
 - ✱ La L. P. ne permet d'énoncer des lois générales, on ne peut énoncer que des lois particulières.

1 – 1 – Insuffisance de L. P (suite)

✧ Exemple :

Frère (Ali , Driss) $\wedge$ Père (Hmida , Driss) $\rightarrow$ Père (Hmida , Ali)

✧ Si l'on veut une loi indépendante des noms propres, on ne peut pas l'énoncer avec la L. P, ou alors il faudrait une infinité d'écritures.

1 – 1 – Insuffisance de L. P (suite)

✧ Exemple :

✧ $\forall x, \forall y, \forall z \text{ Frère}(x, y) \wedge \text{Père}(z, x) \rightarrow \text{Père}(z, y)$ ne peut s'énoncer qu'en L. P. O. (ou d'ordre supérieur).

✧ $(\text{Socrate est un homme}) \wedge (\text{Tout est mortel}) \rightarrow \text{Socrate est mortel}$ en L. P.

✧ la généralisation de cette loi ne peut s'écrire en L. P. mais en L.P. O.

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \text{ Homme}(x) \rightarrow \text{Mortel}(x) \\ \text{Homme}(\text{Socrate}) \end{array} \right\} \xrightarrow{M.P.} \text{Mortel}(\text{Socrate})$$

1 – 2 – Définition

✧ Un prédicat est une fonction propositionnelle :

$$\begin{aligned} P &: D^n \rightarrow \{V, F\} \\ x &\mapsto P(x) \end{aligned}$$

✧ ou D^n est le domaine d'application, c'est-à-dire que pour chaque " x " $\in D^n$ le prédicat devient une proposition $P(x)$ qui sera **VRAIE** ou **FAUSSE**.

2 – Langage de la L. P. O.

2 – 1 – Alphabet des symboles

-
- ✱ **Les constantes ($\in D$) :** a, b, c, ... ou leurs concaténation : "bloc", "not" ,
 - ✱ **Les variables ($\in D$) :** x , y , z , ...
 - ✱ **Symboles des fonctions :** $f : D^n \rightarrow D$
 - ✱ **L'arité n d'un prédicat** = nombre de ses arguments
 - ✱ **Opérateur :** $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$
 - ✱ **Séparateurs :** (,) , [,] , { , }
 - ✱ **Quantificateurs :** l'universel $\forall$ et l'existentiel $\exists$

2 – 2 – Termes

✧ Un terme est :

✧ i. Soit une constante

✧ ii. Soit une variable ou

✧ iii. l'application d'une fonction n-adique "f" à n termes ($t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$)

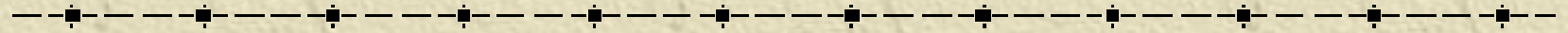
✧ Tous les termes sont engendrés par les règles (i) , (ii) et (iii) appliqués un nombre de fois.

2 – 3 – Atomes

-
- i. Les symboles des propositions (Prédicats d'arité 0) sont des atomes
 - ii. **SI** P est un prédicat d'arité $n \geq 1$ et
SI $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ sont des termes
ALORS $P(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ est un atome.

Tous les atomes sont définis par (i) et (ii) uniquement.

2 – 4 – Un littéral



✱ Un littéral est un atome ou la négation d'un atome.

2 – 5 – Formules ou f.b.f

i. Un atome est une f.b.f.

ii. SI φ et Ψ sont des f.b.f

ALORS $\neg \varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ sont des f.b.f.

iii. SI Ψ est une f.b.f. contenant la variable x

ALORS $((\forall x) \psi)$ et $((\exists x) \psi)$ sont des f.b.f.

iv. Toute f.b.f. est engendrée uniquement par un nombre fini d'application de (i), (ii) et (iii).

2 – 5 – Formules ou f.b.f (suite)

.

Exemple d'ordre de quantification :

$\forall x \exists y (x > y) \Rightarrow y \text{ est fonction de } x.$

$\exists y \forall x (x > y) \Rightarrow y \text{ est indépendant de } x.$

2 – 5 – Formules ou f.b.f (suite)

✧ Variables libres et liées

- ◆ Une variable est liée $\Leftrightarrow$ elle est dans la portée d'un quantificateur.

Exemple : $(\forall x) P(x,y) (\exists x) Q(x,)$ P et Q sont des portées du quantificateur $\forall$ et $\exists$ respectivement.

2 – 5 – Formules ou f.b.f (suite)

- ✧ Une variable est libre si et seulement si elle n'est pas liée.
- ✧ Une variable peut être libre et liée dans une même f.b.f.

Exemple : $P(x) \vee \forall x Q(x)$ *x est libre dans P et liée dans Q*

- ✧ Une f.b.f est fermée si et seulement si elle ne contient aucune variable libre, sinon elle est ouverte.

2 – 6 – Relations

$$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$$

2 – 7 – Notation

✱ Si Q est le quantificateur $\forall$
(respectivement $\exists$)

alors Q' sera le quantificateur $\exists$
(respectivement $\forall$).

3 – 2 – Interprétation

- ✧ Une interprétation d'une f.b.f G est définie par les quatre étapes suivantes :
- ✧ i. Définir un domaine D d'interprétation, un ensemble Φ d'éléments qui sont les valeurs possibles des termes.
 - ✧ ii. Assigner à chaque constante de la f.b.f G , un élément de D .

$$\begin{array}{l} G \rightarrow D \\ \forall \text{ cte} \in G \rightarrow t \end{array}$$

3 – 2 – Interprétation (suite)

- ✱ iii. Assigner à chaque prédicat d'arité $n \geq 0$ une application de $D^n \rightarrow \{T, F\}$
- ✱ iv. Assigner à chaque fonction d'arité $n \geq 1$ une application de $D^n \rightarrow D$. On dit alors que G est interprété sur D .

3 – 2 – Interprétation (suite)

Exemple : soit $G = (\forall x) (P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$ une interprétation I est telle que :

$$I: \begin{cases} D=\{1,2\}; a=1; f=\begin{cases} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \end{cases} \\ P: \begin{cases} 1 \rightarrow F \\ 2 \rightarrow V \end{cases} ; Q: \begin{cases} (1,1) \rightarrow V \\ (1,2) \rightarrow V \\ (2,1) \rightarrow F \\ (2,2) \rightarrow F \end{cases} \end{cases}$$

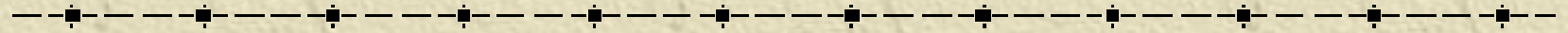
Alors :

$$\begin{aligned} \text{Pour } x=1 \quad & P(1) \rightarrow Q(2,1) \\ & F \rightarrow F \\ & \Rightarrow G=V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x=2 \quad & P(2) \rightarrow Q(1,1) \\ & V \rightarrow V \\ & \Rightarrow G=V \end{aligned}$$

$\Rightarrow I$ est un modèle de G

3–3– Validité et inconsistance



✱ même définition qu'en L.P.

3–4– Equivalence et conséquence logique

✱ Identique

✱ Par contre la méthode de la table de vérité est inapplicable dans la L.P.O.

4 – Syntaxe

4–1– Schéma axiomatique

✦ **SI** Ψ est un théorème de la L.P et si φ est obtenue en substituant dans Ψ une proposition par une f.b.f de la L.P.O ,

ALORS φ est un axiome de la L.P.O.

Exemple :

|---- $(P \wedge Q) \rightarrow P$ est un théorème de la L.P.

$((\forall x) P(x) \wedge Q(y) \rightarrow (\forall x) P(x))$ est un théorème de la L.P.O.

4 – 2 – Règles d'inférences

- ✱ 2.1. même définition qu'en L.P.
- ✱ 2.2. exemples de R.I.
- ✱ R1 : Modus Ponens
- ✱ R2 : Modus Tollens
- ✱ R3 : Principe de Résolution
- ✱ R4 : Règle d'inférence « spécialisation universelle »
- ✱ A partir de $\forall x$, **G(x)** et toute cte « **a** » elle exhibe (déduit) **G(a)** par remplacement de toute occurrence de « **x** » par « **a** ».

4 – 2 – Règles d'inférences

✱ Une **occurrence** d'une variable **x** dans une formule **F** est un **endroit** où **x** apparaît dans **F** sans être immédiatement précédée par $\forall$ ou $\exists$

4-2- Règles d'inférences (suite)

- ✱ Si $((Qx) A)$ est une f.b.f. , A est le scope de Qx et x est l'occurrence quantifiée par Q .
- ✱ Une occurrence de variable x est liée si et seulement si elle est dans le scope d'un quantificateur qui quantifie une occurrence de cette même variable où elle est elle-même l'occurrence quantifiée.
- ✱ Une occurrence de variable est libre si et seulement si elle n'est pas liée.

4–2– Règles d'inférences (suite)

- ✱ Une variable est liée dans une f.b.f. $\Leftrightarrow$ une au moins de ses occurrences est liée.
- ✱ Une variable est libre dans une f.b.f. $\Leftrightarrow$ une au moins de ses occurrences est libre.
- ✱ Une f.b.f. qui ne comporte pas de variable libre est dite fermée.

3 – Formes normales Prenex

3 – 1 – Définitions

✧ La f.b.f. **G** est sous **forme normale de Prenex** si et seulement si **G** s'écrit sous la forme : $G = (Q_1 x_1 \dots Q_n x_n) M$ où $Q_i = \forall$ ou $\exists$, Q_i = préfixe et **M** est une f.b.f. sans quantificateur dite Matrice.

✧ Exemple :

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z) \quad P(x, y) \longrightarrow H(x, z)$$

3 – 2 – Formules équivalentes

✦ Les équivalences de la L.P. sont conservés, on y rajout

- $\neg((Qx)M) \equiv (Q'x)(\neg M)$
- $(Qx)M \vee G \equiv (Qx)(M \vee G)$ Si G ne contient aucune occurrence de x
- $(Qx)M \wedge G \equiv (Qx)(M \wedge G)$ occurrence de x
- $(\forall x)M \wedge (\forall x)N \equiv (\forall x)(M \wedge N)$
- $(\exists x)M \vee (\exists x)N \equiv (\exists x)(M \vee N)$
- $(\forall x)M \vee (\forall x)N \equiv (\forall x)(M \vee N)$
- $(\exists x)M \wedge (\exists x)N \equiv (\exists x)(M \wedge N)$
- $(Q_1 x)M(x) \vee (Q_2 x)N(x) \equiv Q_1(x)Q_2(y)(M(x) \vee N(y))$
- $(Q_1 x)M(x) \wedge (Q_2 x)N(x) \equiv Q_1(x)Q_2(y)(M(x) \wedge N(y))$

3 – 3 – Passage sous f.n.P

✠ Pour écrire une f.b.f. sous f.n.P. On appliquera les règles suivantes :

- (i) Eliminer les $\leftrightarrow$ et les $\rightarrow$
- (ii) Utiliser les formules d'équivalences pour ramener les $\neg$ immédiatement devant les atomes.
- (iii) Utiliser le reste des formules d'équivalences pour ramener les Q_i à gauche de la f.b.f.

3-3- Passage sous f.n.P (suite)

✱ Exemple :

$$\begin{array}{ll} G=(\forall x) & P(x) \rightarrow (\exists x)(Q(x)) \\ G=(\exists x) & \neg P(x) \vee (\exists x)(Q(x)) \\ G=(\exists x) & \underbrace{(\neg P(x) \vee Q(x))}_{\text{Matrice}} : \text{f.n.Prenex} \end{array}$$

4 – Formes standard de Skolem: (suppression des quantificateurs)

4 – 1 – Fonctions de Skolem

✧ Soit $\varphi = (Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) M$ Prenex

✧ Pour écrire φ sous forme standard de Skolem on doit :

✧ i. Mettre M sous f.n.c : $M = M_1 \wedge \dots \wedge M_g$

✧ ii. Si $Q_i = \exists$

✦ S'il n'y a aucun $\forall$ à gauche de Q_i alors supprimer $Q_i x_i$ et remplacer x_i par une constante non existante déjà dans M .

✦ Si $Q_j, \dots, Q_1$ sont à gauche de Q_i et sont tous des $\forall$ alors supprimer $Q_i x_i$ et remplacer toute occurrence de x_i par une fonction $f(x_j, \dots, x_1)$.

✧ iii. Lorsque tous les $\exists$ sont supprimés on obtient ce qu'on appelle f.s. de Skolem les constantes et les fonctions définies sont dites fonctions de Skolem.

4 – 1 – Fonctions de Skolem (suite)

✧ **Remarque** : Une f.b.f. peut avoir plusieurs formes de Skolem.

✧ **Exemple** :

$$(\forall x) P(x) \wedge (\exists y) Q(y) = G$$

$$G = (\forall x)(\exists y) (P(x) \wedge Q(y))$$

$$y = f(x) \quad 1^{\text{ère}} \text{ fonction de Skolem.}$$

$$G = (\forall x) P(x) \wedge Q(f(x)) \quad 1^{\text{ère}} \text{ forme de Skolem.}$$

4 – 1 – Fonctions de Skolem (suite)

✱ Ou bien :

$$G = (\exists y) Q(y) \wedge (\forall x) P(x)$$

$$G = (\exists y)(\forall x) Q(y) \wedge P(x)$$

Soit $y=a$ 1^{ère} fonction de Skolem.

$\Rightarrow G = (\forall x) (Q(a) \wedge P(x))$ 2^{ème} forme de Skolem.

La plus simple et la meilleur (la 2^{ème} dans notre cas).

4–2– Formes clauseales (ou ensemble de clause)

✱ Une clause est une disjonction de littéraux

$P(x)$, $P(x) \vee \neg Q(y)$ sont des clauses.

✱ Un ensemble de clauses correspond à une

✱ conjonction de clauses où chaque variable est contrôlé par $\forall$.

4-2- Formes clauseales (suite)

✱ • $\phi = \forall x_1 \dots \forall x_m \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ (où chaque φ_i est une disjonction de littéraux (clause)) est une forme clauseale.

✱ On supprime tous les quantificateurs $\forall$ pour représenter ϕ sous la forme : $\phi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$
Forme clauseale

✱ ou $\phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ensemble de clauses.