THEORIE DES POSSIBILITES

Problématique

- La rigidité du modèle probabiliste le rend inadéquat à la représentation et à l'exploitation des connaissances approximatives

  Exemple: la plupart des oiseaux volent

- Le modèle probabiliste est incapable de représenter l'ignorance totale (c'est à dire il ne peut pas l'exprimer avec une distribution de probabilité unique).

  Exemple: en cas d'ignorance totale sur la vie extra-terrestre

  P(vie)=P(non-vie)=1/2 (maximisation de l'entropie).

- Cette représentation présuppose qu'il n'y a qu'une alternative; si le choix est porté entre la vie végétale, animale et il n'y a pas de vie, l'approche probabiliste proposera l'équiprobabilité

  P(vie-végétale)=P(vie-animale)=P(non-vie)=1/3.

- Il est facile de voir que les deux représentations de l'ignorance sont incompatibles et ce résultat est qualifié de paradoxe de l'ignorance totale

Introduction

- La théorie des possibilités a été proposée par Zadeh en 1978 et développée par Dubois et Prade en 1987
- Fournit un modèle de représentation de l'Incertitude de nature non-probabiliste.
- Dans un tel modèle l'incertitude est caractérisée par un couple de mesures de possibilité et nécessité, définies sur l'ensemble P(X), ensemble des parties de X, à valeurs dans [0, 1].

Mesure de possibilité

- On appelle mesure de possibilité la fonction Π, définie sur l’ensemble P(X), ensemble des parties de X, à valeurs dans l'intervalle [0, 1], c’est à dire:

$$\Pi: P\,(X) \to [\,0, 1]$$

- Une mesure de possibilité vérifie les propriétés suivantes:

$$\Pi(\emptyset\,) = 0 \text{ et } \Pi(X\,) = 1$$

$$\Pi(A \cup B\,) = \max\,[(\Pi(A)\,,\,\Pi(B)]$$

$$\text{Si } A \supseteq B, \text{ alors } \Pi(A) \geq \Pi(B\,)$$

Mesure de possibilité

l’opérateur max, fournit la plus grande valeur de Π(A) et Π(B), ce qui est cohérent avec l’idée physique des possibilités; c’est à dire pour réaliser A∪B, il suffit de réaliser le plus facile des deux ou encore le plus possible à réaliser.

Relation entre possibilité et distribution de possibilité

- On peut aussi construire à partir d’une distribution de possibilité π, définie sur un référentiel X, à valeurs dans l'intervalle [0, 1], telle que $\sup_{(x \in X)} \pi(x) = 1$, une mesure de possibilité Π:

$$\forall\, A \in P(X),\ \Pi(A) = \sup_{(x \in A)} \pi(x)$$

- Si le référentiel X est fini, une distribution de possibilité est complètement définie par la donnée de l’ensemble de ses valeurs sur les singletons de X:

$$\forall\, x \in X\ \pi(x) = \sup_{(x \in x)} \Pi(\{x\})$$

Distribution de possibilité conjointe

- On représente une mesure de possibilité d'occurrence simultanée de l'élément x de X et de y de Y, par une distribution de possibilité conjointe $\pi(x, y)$ sur le référentiel $X \times Y$, pour tout $x \in X$ et $y \in Y$.
- On peut construire aussi à partir d'une connaissance globale de $\pi(x, y)$ sur

$X \times Y$, deux distributions de possibilités marginales:

$$\forall x \in X \ \pi_X(x) = \sup_{(y \in Y)} \pi(x, y)$$

$$\forall y \in Y \ \pi_Y(y) = \sup_{(x \in X)} \pi(x, y)$$

- telle que: $\forall x \in X, \forall y \in Y \ \pi(x, y) \leq \min(\pi_X(x), \pi_Y(y))$.
- Si $\pi(x, y) = \min(\pi_X(x), \pi_Y(y))$, alors les ensembles de références X et Y sont dits non- interactifs.

Distribution de possibilité conditionnelle

- On représente aussi l'ensemble des degrés avec lesquels un élément y de Y est possible, sachant que l'élément x de X est pris en considération par une distribution de possibilité conditionnelle $\pi_{Y/X}$ de telle sorte que:
- $\forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y\ \pi(x, y) = \pi_{Y/X}(x, y) * \pi_X(x)$
- l'opérateur $*$ est généralement représenté par le minimum ou le produit.

Probabilité et possibilité

- Dans le modèle probabiliste, la relation $P(A) + P(\neg A) = 1$ qui lie le degré de confiance et de doute d’un événement A est tellement forte que, dès que l’on connaît l’une des probabilités, l’autre est systématiquement déduite, c’est-à-dire $P(\neg A)$ est complètement déduite à partir de $P(A)$ et vice versa.
- Dans le modèle possibiliste, la relation $\max [(\Pi (A) , \Pi (\neg A)] = 1$, dont l’interprétation est telle que, l’un des deux événements contraires a au moins une possibilité maximale, de plus si l’un des événements est possible rien n’empêche l’autre qu’il le soit.
- A cet effet, pour représenter l’incertitude, on a besoin de la paire d’informations $[(\Pi(A),\Pi(\neg A)]$, parce que l’une ne peut caractériser l’autre.

Probabilité et possibilité

- Si $\Pi(A) = 1$ et si, $\Pi(\neg A) = 0$, alors A est tout a fait possible, ce qui correspond à une bonne connaissance de réalisation de A.
- Si $\Pi(A) = \Pi(\neg A) = 1$, alors A et ¬A sont équi-possibles, ce qui correspond à une situation d’ignorance.
- Pour compléter l’information sur A, on indique le degré avec lequel la réalisation de A est certaine, par l’intermédiaire d’une mesure de nécessité $N(A) = 1\text{-}\Pi(\neg A)$, grandeur duale d’une mesure de possibilité, ce qui est cohérent avec l’idée qui postule "un événement est certain si son contraire est impossible".

Mesure de nécessité

- On appelle une mesure de nécessité la fonction N, définie sur l'ensemble P(X), ensemble des parties de X, à valeurs dans l'intervalle [0, 1], c'est à dire:

$$\mathbf{N}: P(X) \rightarrow [\,0, 1]$$

- Une mesure de nécessité vérifie les propriétés suivantes:

$$N(\emptyset\,) = 0 \text{ et } N(X\,) = 1$$

$$N\,(A \cap B\,) = \min\,[(N(A)\,,\,N(B\,)]$$

$$\text{Si } A \supseteq B, \text{ alors } N(A) \geq N(B\,)$$

- L'opérateur min fournit la plus petite valeur de N(A) et N(B).

Relation entre nécessité et distribution de possibilité

- A partir d’une distribution de possibilité π, on peut également construire une mesure de nécessité N:

$$\forall A \in P(X), N(A) = \min_{x \notin A} (1 - \pi(x))$$

Propriétés de la mesure de possibilité Π et nécessité N

- $N(A) \leq \Pi(A)$. Confirmation de l'idée intuitive "qu'un événement doit toujours être plus possible que nécessaire".
- $N(A) = 1 - \Pi(\neg A)$. Un événement est certain si son contraire est impossible.
- $N(A) + N(\neg A) \leq 1$. Si $N(A)$ est incertain, $N(\neg A)$ n'est pas forcément certain.
- $\Pi(A) + \Pi(\neg A) \geq 1$. Si l'un des événements est possible, rien n'empêche que l'autre le soit.
- $\min[(N(A), N(\neg A)] = 0$. L'un des deux événements contraires est incertain. Cela est dû à la simplicité du modèle qui interdit qu'un événement et son contraire soient simultanément quelque peu certains.
- $\max[(\Pi(A), \Pi(\neg A)] = 1$. L'un des deux événements contraires est possible.
- $\Pi(A) < 1 \Rightarrow N(A) = 0$. Si A est un événement relativement possible, alors A est incertain.
- $N(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1$. Si A est un événement au moins un peu certain, alors A est tout à fait possible

Conclusion

- La particularité du modèle possibiliste par rapport au modèle probabiliste réside dans sa flexibilité de choisir avec plus de liberté des coefficients de possibilité (ou de nécessité).
- Ceci revient au fait que, la possibilité (ou nécessité) d’un événement et celle de son contraire sont faiblement liées, la possibilité de l’union ne dépend pas de l’interaction entre les deux événements mais uniquement de leurs possibilités respectives; il en est de même de la nécessité.
- En outre si le suprêmum des valeurs de distribution de possibilité est égal à 1 et si l’un des événements est connu comme égal à 1, par exemple, toutes les autres peuvent prendre une valeur quelconque.
- Pour caractériser l’incertitude sur un événement A, on dispose de deux limites: une inférieure N(A) et l'autre supérieure Π(A).
- La probabilité d’un événement A se situe dans l’intervalle $N(A) \leq P(A) \leq \Pi(A)$.

Conclusion

- Dans le cas particulier où les éléments focaux sont des événements élémentaires, donc disjoints, alors N(A)=Π(A)=P(A).
- L'idée simplificatrice des contraintes probabilistes, afin de pouvoir traiter l'incertitude en présence de connaissances incomplètes, par le modèle possibiliste offre une souplesse à l'utilisation de ses coefficients (de possibilité et nécessité), mais avec moins de richesse en information que n'en contient la probabilité.
- Des tentatives faites en théorie des possibilités telles que l'emploi des relations floues comme étant des degrés de possibilité pour formaliser le raisonnement abductif (la recherche des clauses plausibles qui permettent de justifier les observations), la fusion des informations issues de sources multiples (construction d'une mesure d'incertitude qui tire le meilleur des informations