Logique floue et Logiques Multivaluées

Théorie de sous-ensemble flou

- Le concept de sous-ensemble flou a été introduit par Zadeh en 1965.

- Permet d'éviter le passage brusque d'une classe à une autre et autorise également une appartenance intermédiaire, ou encore appartenir partiellement à chacune.

- Concept motivé par des problèmes de classification et caractérisé particulièrement par l'abandon du tiers-exclu (soit une proposition est vraie, soit elle est fausse) et celle de la contradiction (une proposition ne peut-être à la fois vraie et fausse).

Théorie de sous-ensemble flou

- **Exemple:**
- Soit un ensemble de sujets qu'on désigne par:

  X={x1, x2, x3}={prune, pêche, brugnon}.
- La partition en deux classes (pêche et prune) de ces trois objets est illustrée par le tableau suivant

Objets	Partition classique			Partition floue		
	x1	x2	x3	x1	x2	x3
Pêche	0	1	0	0.1	0.8	0.6
Prune	1	0	1	0.9	0.2	0.4

Théorie de sous-ensemble flou

- Le brugnon est représenté dans chaque partition par la troisième colonne.
- Il est évident que selon le concept classique, en attribuant au brugnon une appartenance de ‘1’, on l'a étiqueté comme étant une prune, or les brugnons ne sont pas des prunes.
- En revanche la partition floue évite ce genre d’erreur, en lui attribuant une appartenance de 0,4 à la classe des prunes et de 0,6 à celle des pêches, et ainsi le brugnon est classé comme étant un hybride de pêche et de prune.

Théorie de sous-ensemble flou

- Les appartenances qui le représentent dans le concept flou semblent physiquement plus plausibles que celle du concept classique qui a mal classé l'objet x3.

- A travers cet exemple nous nous permettons de conclure que le raisonnement Booléen est insuffisant dans certaines situations et qu'une généralisation de la théorie des ensembles classiques s'avère nécessaire.

Définition d’un sous-ensemble flou

- On définit un sous-ensemble flou A d’un univers X, par une fonction d’appartenance qui associe à chaque élément x de X, le degré d’appartenance, compris entre 0 et 1, avec lequel x appartient à A:

$$\mu_A: X \rightarrow [\ 0, 1\ ]$$

- Dans le cas où $\mu_A = 1$ si x $\in$ A et 0 dans le cas contraire, alors A est un ensemble classique.

Définition d'un sous-ensemble flou

- En général, on désigne un ensemble flou A de X par:

$$A = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \,/\, x \text{ si X est dénombrable.}$$

$$A = \int_{x \in X} \mu_A(x) / x \text{ si X est non dénombrable.}$$

- Cette représentation ne fait référence à aucune idée de sommation ni d'intégration; elle indique seulement, pour tout élément x de X, son degré μ_A (x) d'appartenance à A.

Caractéristiques d’un sous-ensemble flou

- Les caractéristiques qui décrivent un sous-ensemble flou A de X sont les suivantes:

1. Support d’un sous-ensemble flou: sup (A) = {x ∈ X/ μ_A (x) ≠ 0}.

2. Hauteur d’un sous-ensemble flou: h(A) = $sup_{x \in X}$ μ_A (x) si h(A) = 1 alors, A est normalisé.

3. Noyau d’un sous-ensemble flou: noy(A) = {x ∈ X/ μ_A (x) = 1}et si A est un sous-ensemble ordinaire de X alors, h(A) = 1 et sup(A) = noy(A) = h(A).

4. Cardinal d’un sous-ensemble flou: Si X est dénombrable alors, |A|=$\sum_{x \in X} \mu_A$ (x)

Opérations sur les ensembles flous

- Les opérations usuelles sur les ensembles classiques s'étendent aux ensembles flous. Etant donné deux sous-ensembles flous A et B de X, on définit l'égalité A=B, l'inclusion A⊆B, l'intersection A∩B, la réunion A∪B, la complémentation ¬ A et le produit cartésien A x B de la façon suivante:

1. A = B si et seulement si μ_A = μ_B
2. A ⊆ B si et seulement si $\mu_A \leq \mu_B$
3. A ∩ B = min (μ_A , μ_B)
4. A ∪ B = max (μ_A , μ_B)
5. $\mu_{\neg A}$ = 1 - μ_A
6. ∀x=(x_1 , x_1) ∈ X= $X_1 \times X_2$, $\mu_{A \times B}$= min (μ_A (x_1), μ_B (x_2))

Opérations sur les ensembles flous

- **Remarque:** Un calcul élémentaire montre bien, contrairement au concept classique, que:

$$A \cup \neg A \neq X \text{ et } A \cap \neg A \neq \emptyset.$$

Ces inégalités constituent le point de rupture par rapport à la théorie des ensembles classiques.

Les α-coupes d’un sous-ensemble flou

- La α-coupe d’un sous-ensemble flou A défini sur un référentiel X est le sous ensemble ordinaire dont les éléments de X qui lui appartiennent ont un degré au moins égal à α, c’est à dire:
- A_{α} = {x ∈ X/ μ_A ≥ α} pour α>0.
- Les α-coupes de A sont des parties non floues emboîtées par rapport à la valeur α; en effet, si ά ≥α, alors $A_{\alpha} \supseteq A_{ά}$.
- La famille des α-coupes est une représentation du sous-ensemble flou auquel elle est associée.
- μ_A = sup {α / x ∈ A_{α} avec α ∈ [0 , 1]}

Logique floue

- La logique floue est fondée sur la théorie des sous ensembles flous et celle des possibilités

- C'est une extension de la logique classique.

- Elle a pour objectif de fournir un modèle formel au raisonnement approximatif.

Proposition floue

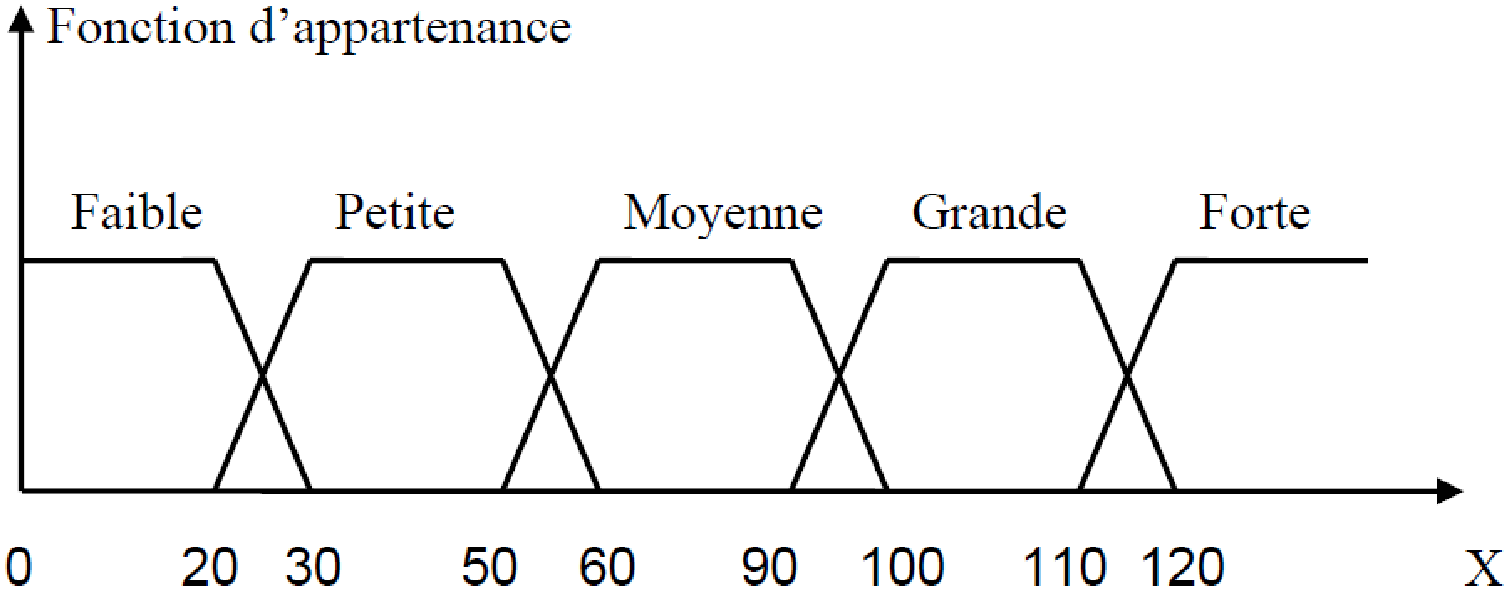
En logique floue les propositions présentées par Zadeh sont des propositions floues définies à partir d'un ensemble L de variables linguistiques (V, X,T_V) et d'un ensemble M de modificateurs.

Variable linguistique

- Une variable linguistique est représentée par le triplet (V, X, T_V), où V est une variable définie sur un référentiel X et T_V = {A1, A2, A3... } est un ensemble fini ou infini de sous ensembles flous qui caractérise la variable V.

Variable linguistique

Exemple: Soit une variable linguistique (V, X, T_V) qui décrit la vitesse du vent



V = Vitesse, $X=R^+$, T_V= {Faible, Petite, Moyenne, Grande, forte }

Modificateur linguistique

- Un modificateur linguistique est un opérateur qui produit à partir de toute caractérisation A de V, une nouvelle caractérisation floue de A. On note M(T_V), la caractérisation de M engendrée par T_V .

Modificateur linguistique

Exemple:

Si T$_{V}$ ={Petite, Grande} et M={plutôt, non} alors

M(T$_{V}$) ={plutôt Petite, plutôt non Grande,…}

Remarque: L'intérêt des modificateurs est de produire des caractérisations, voisines les unes des autres par modification graduelle.

Proposition floue élémentaire

Une proposition floue élémentaire est définie à partir d'une variable linguistique (V, X, T_V) de L par la qualification (V est A), où A est une caractérisation floue appartenant à T_V ou à M(T_V), et que sa valeur de vérité est définie par la fonction d'appartenance μ_V.

Proposition floue générale

Une proposition floue générale est une composition de propositions floues élémentaires par conjonction, disjonction ou implication.

Proposition floue Générale Conjonction

- La plus simple s'exprime comme la conjonction de propositions floues élémentaires "V est A et W est B"
- V et W sont des variables définies respectivement sur des référentiels X et Y, et elle est associée au produit cartésien A x B
- La valeur de vérité est définie par

$$\min(\mu_A(x), \mu_B(y)), \ \forall (x, y) \in X \times Y$$

Proposition floue Générale Disjonction

- On peut de même obtenir une proposition floue par disjonction de propositions floues élémentaires "V est A ou W est B".
- La valeur de vérité est définie par:

$$\max(\mu_A(x), \mu_B(y)) \ \forall (x, y) \in X \times Y$$

Proposition floue Générale Implication

- Une implication entre deux propositions floues élémentaires est aussi une proposition floue, que l'on exprime par : "V est A implique W est B", dont la valeur de lien (de l'implication floue) entre ces deux propositions dépend des fonctions d'appartenances μ_A et μ_B et qui est définie par la fonction d'appartenance μ_R d'une relation floue entre X et Y, telle que:

$$\forall (x, y) \in X \times Y \ \mu_R (x, y) = \phi (\mu_A (x), \mu_B (y))$$

Proposition floue générale

- Il existe plusieurs définitions de l'implication floue, selon la manière dont l'implication classique '→' est généralisée.

- Les principales implications qui généralisent l'implication en logique classique sont résumées dans le tableau suivant:

Implications floues	**Auteurs**
μ_{RR} (x, y) = 1-μ_A (x) + μ_A (x)*μ_B (y)	Reichenback
μ_{RW} (x, y) = max (1-μ_A (x), min(μ_A (x), μ_B (y))	Willmott
μ_{RRG} (x, y) = 1 si μ_A (x) ≤ μ_B (y) = 0 sinon	Resher-Gaines
μ_{RKD} (x, y) = max (1-μ_A (x), μ_B (y))	Keene-Dienes
μ $_{RBG}$ (x, y) = 1 si μ_A (x) ≤ μ_B (y) = 0 sinon	Brouwer-Gödel
μ_{RL} (x, y) = min (1-μ_A (x) + μ_B (y), 1)	Lukasiewicz
μ_{RM} (x, y) = min (μ_A (x) , μ_B (y))	Mamdani
μ_{RP} (x, y) = μ_A (x).μ_B (y)	Larzen

Relation entre distribution de possibilité et proposition floue

- Dans une base de connaissances, on décrit une proposition floue du type "V est A", par une distribution de possibilité.

- Soit une proposition floue élémentaire "V est A", la distribution de possibilité $\pi_{V,A}$ qui lui est associée est définie sur le référentiel X à partir de la fonction d'appartenance μ_A de A par:

$$\forall\ x \in X : \pi_{V,A}(x) = \mu_A\ (x)$$

Relation entre distribution de possibilité et proposition floue

- Soit une proposition floue élémentaire "V est A" et μ_A la fonction d’appartenance de A, la mesure de possibilité et la mesure de nécessité de toute partie non floue E de X sont respectivement définies par:

$$\Pi_{V,A}(E) = sup_{x \in E}\ \mu_{V,A}\ (x) \text{ et } N_{V,A}\ (E) = 1 - \Pi_{V,A}(\neg E)$$

Relation entre distribution de possibilité et proposition floue

- Soit une proposition floue générale "V est A et W est B", avec V et W définies respectivement sur les référentiels X et Y; elle induit une distribution de possibilité sur le produit cartésien des ensembles de définitions des variables de la proposition floue telle que:

$$\forall\, x \in X\ \forall\, y \in Y\ \pi_{(V,W),A\times B}\ (x\ ,\ y) = \min\ (\mu_A\ (x),\ \mu_B\ (y))$$

Modus ponens généralisé

- A l’origine, le mécanisme de raisonnement le plus classique qu’on rencontre en intelligence artificielle ou dans les systèmes à base de connaissances, est le modus ponens "de A et A⇒B inférer B", qu’on qualifie souvent de conservateur de valeurs de vérité des inférences effectuées.
- Ainsi, si la règle A⇒B est vraie et si A (la prémisse) est vraie, alors B (la conclusion) est vraie aussi (B a conservé la valeur de vérité de A).
- Or, il arrive souvent que les faits observés ne coïncident pas avec celui dans la prémisse de la règle. Dans ce cas on fait appel au modus ponens généralisé.

Modus ponens généralisé

- En présence de la règle de la forme "si V est A alors W est B" (où V et W sont des variables définies respectivement sur des référentiels X et Y) et d’une observation " V est A’" (où A’ est plus au moins diffèrent de A c’est à dire les sous-ensembles flous A et A’ ont des fonctions d’appartenances peu différentes), alors la conclusion sera très proche de la conclusion de la règle.

Modus ponens généralisé

- Soit la règle floue "si V est A alors W est B" et le fait observé "V est A’", alors les conditions d’utilisation du modus ponens généralisé sont les suivantes:
- Règle floue: si V est A alors W est B
- Fonction d’appartenance: μA μB
- Fait observé: V et A’
- Fonction d’appartenance: μA’
- Conclusion : W est B’
- Fonction d’appartenance : μB’

Logiques multivaluées

- Le développement de la logique classique est, à l’origine, issu de motivations philosophiques afin de modéliser le raisonnement rigoureux dans un contexte certain.
- On entend par logique classique, soit la logique des propositions, soit la logique des prédicats. Bien que la logique classique occupe une place importante dans l’IA, elle est marquée par une absence totale de représentation de l’incertain et du probable

Logiques multivaluées

- Des extensions de cette dernière ont été proposées pour traiter l’incertain, grâce à l’insertion de valeurs de vérités intermédiaires entre les valeurs extrêmes qui sont le vrai (V) et le faux (F).
- Le besoin d’un tel formalisme qui a pour objectif d’améliorer l’expressivité de ce langage et de le rapprocher le mieux possible du langage naturel a donné naissance à d’autres logiques non classiques dites logiques multivaluées.

Logiques multivaluées

- Considérons deux exemples classiques de la littérature de ce thème:
- Le premier exemple est d’Aristote: "Demain, il y aura ou il n’y aura pas une bataille".
- Selon Aristote il n’est pas nécessaire que cela se réalise demain, il est non plus nécessaire que cela ne se passe; mais, il serait nécessaire que cela se passe ou ne se passe pas demain.

Logiques multivaluées

- Le deuxième exemple est celui de Lukasiewicz : "Le 25 décembre de l’année prochaine je serai à Varsovie".
- D’après Lukasiewicz au présent, cette proposition est ni vraie, ni fausse, mais seulement possible. Ce qui l'a conduit à introduire une troisième valeur différente de ‘1’ le vrai et ‘0’ le faux, et selon le sens qu’on attribue à cette troisième valeur (l’impossible, l’incertain ou l’inconnu, l’absurde ou le non-sens, l’indétermination etc.), on peut construire différentes logiques multivaluées.

Logiques multivaluées

- la structure algébrique utilisée par la plupart des logiques multivaluées est basée sur la méthode des tables de vérité, formées d'un ensemble fini d'opérateurs, principalement l'implication et la négation, qui permettent d'introduire le calcul propositionnel sans faire recours à des axiomes.
- L'échec de toutes les tentatives de modélisation de l'incertitude, par le biais des différentes logiques multivaluées réside dans la confusion du degré de vérité et du degré d'incertitude d'une proposition.

Logiques multivaluées

- la considération de l’indétermination comme étant une troisième valeur intermédiaire entre le vrai (absolu) et le faux (absolu), sans qu’il soit possible de savoir laquelle, est une erreur similaire à celle qui identifie le degré d’appartenance au degré d’incertitude.

Logiques multivaluées

- Une théorie dite théorie des multi-ensembles a été développée par De Glas, basée sur l’idée qu’il est nécessaire de faire la distinction entre degré de vérité d’une proposition qui peut, en l'absence de toute incertitude, n’être ni vraie ni fausse (i.e. vraie à un certain degré) et le degré d’incertitude sur une proposition qui soit vraie ou qui soit fausse mais dont on ne sait pas si elle est vraie ou fausse (i.e. auquel un degré d’incertitude peut lui être attribué).