إن لكل سلعة تطرح في السوق جانبين: جانب الطلب عليها (وقد تم الحديث عنه خلال السداسي الأول) وجانب العرض أي الرغبة في بيعها عند سعر معين.

إن المنتج قد يكون شخصا طبيعيا كالفلاح أو قد يكون شخصا معنويا كالمؤسسة التي تخضع لإدارة توجه نشاطها بقصد الحصول على أكبر ربح ممكن في حدود إمكاناتها (الميزانية وأسعار عناصر الإنتاج) وذلك من خلال تدنية التكاليف إلى أدنى حد ممكن في ظل ظروف السوق السائدة (تنافسية، احتكارية...).

إن أدوات التحليل بالنسبة لنظرية الإنتاج عادة ما تشبه إلى حد كبير أدوات التحليل الخاصة بنظرية سلوك المستهلك والجدول الآتي يبين ذلك.

نظرية المستهلك	نظرية المنتج
– المستهلك يشتري السلع والخدمات لإشباع حاجاته. – المستهلك يمتلك دالة منفعة. – يتم التعبير عن ميزانية المستهلك بواسطة دالة خطية بالنسبة لكميات السلع تسمى قيد الميزانية.	– المنتج يشتري عوامل الإنتاج لإنتاج السلع والخدمات. – المنتج يمتلك دالة إنتاج. – يتم التعبير عن ميزانية المنتج (دالة التكاليف) بواسطة دالة خطية بالنسبة للمدخلات وتسمى معادلة التكلفة.

أما ما يميز نظرية المستهلك عن نظرية الإنتاج، هو أن دالة المنفعة دالة ذاتية لا تخضع لمقياس معياري أما دالة الإنتاج فهي دالة موضوعية تخضع لمختلف القياسات، كما أن هدف المستهلك هو الحصول على أقصى منفعة أما هدف المنتج هو الحصول على أقصى ربح من خلال تدنية التكاليف إلى أدنى حد.

ويجمع الاقتصاديون على أن الإنتاج يقصد به عملية إعداد ومواءمة الموارد المتاحة لإشباع الرغبات البشرية وذلك بتغيير نوعيتها المادية أو الكيمائية أو الحيوية لتحويلها إلى الصورة التي تحقق الإشباع، كما يطلق على الإنتاج أيضا:

1- العمليات التي تخلق (تضيف) المنفعة في المادة أو تزيد منها وتسمى المنفعة الشكلية مثل تحويل الصوف إلى قماش.
2- العمليات التي تقوم بنقل المادة من مكان إلى آخر وتسمى المنفعة المكانية مثل نقل البترول.
3- العمليات التي تقوم بنقل المادة في الزمن وتسمى المنفعة الزمانية مثل: تخزين مياه الأمطار، الاحتفاظ بالسلع عن طريق التبريد.
4- المنفعة التمليكية: نقل الملكية من شخص لا ينتفع بها إلى شخص آخر ينتفع بها.
5- الخدمات التي يقدمها أصحاب المواهب كالطبيب والمحامي والمهندس ورجل الدين.

وتتمثل المدخلات في عناصر الإنتاج التي تقسم إلى أربع أصناف تقليدية وهي العمل، الأرض، رأس المال، التنظيم وتسمى أيضا (موارد الإنتاج)، وعوائد عناصر الإنتاج السابقة على الترتيب هي: الأجر، الريع، الفائدة، والربح.

- العمل: ويقصد به القوى العاملة فعلا أو التي تبحث عنه وقادرة عليه.
- الأرض: وتضم كافة الموارد الطبيعية غير البشرية سواء كانت أراضي زراعية، صناعية أو إستخراجية.
- رأس المال: ويشمل رصيد المجتمع أو ثروته من كافة المواد التي صنعها الإنسان لتساعده في إنتاج حاجاته وينقسم إلى رأس مال إنتاجي ويساهم مباشرة في العملية الإنتاجية مثل: المواد الخام والآلات والتجهيزات، المباني والمنشآت، ورأس المال الاجتماعي الذي يساهم بشكل غير مباشر في العملية الإنتاجية مثل: الطرقات، الجسور، المدارس...إلخ.

وبذلك فإن رأس المال في هذه الحالة يختلف عن رأس المال النقدي لأن النقود هي وسيلة للتبادل ولا تعد عنصرا من عناصر الإنتاج.

- التنظيم: حيث يقوم المنظم بتجميع عناصر الإنتاج واتخاذ قرار يساهم في العملية الإنتاجية ويتحمل مخاطرها فهو يضع موهبته في خدمة المشروع.

ملاحظة: هناك فرق بين العرض والإنتاج، فالعرض هو الكمية التي تعرض في السوق من سلعة ما خلال فترة زمنية معينة عند سعر محدد ومن ثم فإن العرض هو الخطوة النهائية في الإنتاج وهو حلقة وصل بين المشروع والسوق ويطلق عليه أحيانا التوزيع.

دالة الإنتاج في الفترة القصيرة (دالة إنتاج بمتغير واحد):

مفهوم دالة الإنتاج: هي علاقة فنية بين المدخلات (عوامل الإنتاج) والمخرجات (الناتج) بمعنى تحويل المدخلات إلى مخرجات كما يمكن التعبير عن دالة الإنتاج بمنحنى– أو جدول– أو علاقة رياضية بين كمية الناتج وعناصر الإنتاج، ويمكن كتابة دالة الإنتاج رياضيا كما يلي: $Q = f(K, L, T....)$ حيث: العمل: L، رأس المال: K، مساحة الأرض: T

وينطلق تحليل دالة الإنتاج بالفترة القصيرة من الفرضيات الآتية:

- وجود عنصر إنتاج متغير وحيد وليكن العمل –L– ووجود عنصر أو عناصر ثابتة مثل رأس المال –K– (بقية العناصر تبقى ثابتة).
- إمكانية الإحلال بين عنصر العمل –L– المتغير وعنصر رأس المال–K– الثابت بعدة نسب.
- الوحدات المستخدمة من العنصر المتغير لابد أن تكون متجانسة (ذات طبيعة واحدة).

ويقسم الاقتصاديون الزمن خلال فترة الإنتاج إلى ثلاث فترات:

أ– **فترة التسويق:** وهي فترة قصيرة جدا بحيث تكون الكمية المعروضة من السلعة ثابتة أي لا يمكن تغيير عناصر الإنتاج في هذه الفترة استجابة للطلب.

ب– **الفترة القصيرة:** وهي الفترة التي تسمح للمشروع بتغيير بعض عناصر الإنتاج كالعمل والمواد الأولية أما رأس المال فيبقى ثابتا خلال هذه الفترة.

ج– **الفترة الطويلة:** وهي الفترة التي تسمح للمشروع بتغيير جميع عناصر إنتاجه (المتغيرة والثابتة).

مما سبق يمكن كتابة دالة الإنتاج في الفترة القصيرة على الشكل:

(رأس المال ثابت): $\boldsymbol{Q = F\,(L/K = K_0) = F(L) = PT_L/K = K_0}$

ويمكن توضيح دالة الإنتاج في الفترة القصيرة من خلال العلاقة بين الناتج الكلي والمتوسط والحدي بالنسبة لعنصر العمل.

- الناتج الكلي للعمل: $PT_L = Q$ ويصف لنا تطور الناتج بدلالة عنصر الإنتاج المتغير العمل $\boldsymbol{L}$ مثلا.
  أو هو مجموع الوحدات المنتجة من السلعة بدلالة العنصر المتغير العمل L مثلا.
- الناتج المتوسط للعمل PM_L: ويصف لنا المساهمة المتوسطة في الإنتاج من طرف العنصر المتغير العمل ويساوي $PM_L = \frac{PT_L}{L} = \frac{Q}{L}$.
- الناتج الحدي للعمل L (الإنتاجية الحدية العينية للعمل) mg_L : وهي تصف لنا نسبة تغير الناتج إلى نسبة تغير كمية العمل أو هي الناتج الإضافي نتيجة زيادة عنصر العمل بوحدة واحدة، وتحسب كما يأتي:

$$P_{mg_L} = \frac{\Delta PT_L}{\Delta L} = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \quad : \left(\text{دالة متقطعة}\right) \text{ أو (جدول)}$$
$$P_{mg_L} = \frac{\partial PT_L}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial L} \quad : \left(\text{دالة مستمرة}\right)$$

قانون تناقص الغلة: عند تغيير عنصر إنتاجي ما وليكن العمل L مع تثبيت بقية العناصر الأخرى فإنه توجد نقطة L_1 يصبح بعدها الإنتاج الحدي متناقصا (أي يتزايد الإنتاج الكلي بمعدل متناقص) ويطلق على هذه الظاهرة اسم قانون تناقص الغلة أو قانون النسب المتغيرة، ويعبر عنها رياضيا:

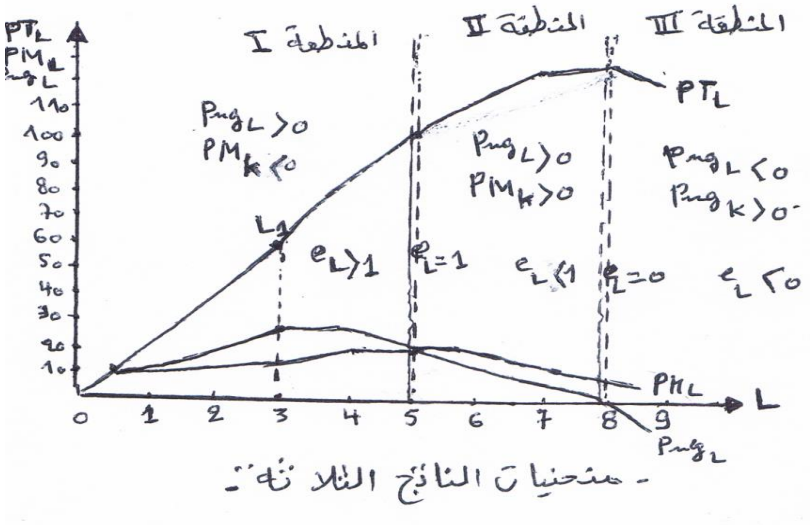
$$\frac{\partial^2 Q = \partial^2 PT_L}{\partial L^2} < 0$$

والغلة كلمة مرادفة للإنتاجية الحدية أو معدل تزايد الناتج، (أي تكون الإنتاجية الحدية للعمل متناقصة والناتج الكلي يتزايد بمعدل متناقص) أي أن الناتج الكلي يتزايد ولكن حجم الزيادات هو الذي يتناقص هذا القانون اكتشفه Turgot (1777) إلا أن الذي صاغه في شكل قانون هو دافيد ريكاردو (1814) وهو ليس قانونا رياضيا إنما هو قانون مستمد من الدراسات التجريبية، وهذا القانون يحكم الفترة القصيرة للإنتاج ويفيدنا في معرفة مناطق الإنتاج الثلاثة.

مثال: ليكن لدينا الجدول الآتي الذي يبين مستوى الإنتاج لكل مستوى من العمالة L في المدى القصير مع بقاء رأس المال K ثابتا (عدد الآلات المستخدمة).

رأس المال K	عدد العمال L	الناتج الكلي للعمل PT_L	الناتج المتوسط للعمل $PM_L = \frac{PT_L}{L}$	الناتج الحدي للعمل $P_{mg_L} = \frac{\Delta PT_L}{\Delta L}$
5	0	0	–	–
5	1	10	10	10
5	2	28	14	18
5	3	54	18	26
5	4	80	20	26
5	5	100	20	20
5	6	108	18	08
5	7	112	16	04
5	8	112	14	00
5	9	108	12	−04

والأشكال البيانية الآتية توضح ذلك.



مما سبق يمكن القول أن منحنيات الناتج تمر بثلاث مراحل:

- **المنطقة I:** في هذه المنطقة:

* يزيد الناتج الكلي بمعدل متزايد ثم بمعدل متناقص.

* الناتج المتوسط يزيد إلى أن يبلغ أقصاه.

* الناتج الحدي يزيد في البداية إلى أن يبلغ أقصاه ثم يتناقص.

وتنتهي هذه المرحلة عندما يتساوى الناتج الحدي للعمل mg_L مع الناتج المتوسط للعمل PM_L، وفي هذه المنطقة تكون الإنتاجية الحدية للعمل أكبر من الإنتاجية المتوسطة للعمل، ومن ثم على المنظم أن يزيد من عدد العمال في هذه المنطقة وحدود هذه المنطقة هي:

$$\boldsymbol{I}: 0 \rightarrow PM_L = P_{mg_L} \text{ أو } (PM_L)' = 0 \text{ أو } MAX: PM_L$$

- **المنطقة II:** في هذه المنطقة:

* الناتج الكلي يستمر في الزيادة المتناقصة إلى أن يبلغ أقصاه.

* الناتج المتوسط يبدأ بالتناقص.

* الناتج الحدي يستمر في التناقص إلى أن ينعدم.

وتعتبر هذه المنطقة أحسن منطقة للإنتاج وحدودها.

$$\boldsymbol{II}: MAX: PM_L \rightarrow P_{mg_L} = 0$$

- **المنطقة III:** في هذه المنطقة تكون كل النواتج متناقصة (الناتج الحدي بالسالب) وحدودها:

$$\boldsymbol{III}: P_{mg_L} = 0 \rightarrow \infty$$

<u>ملاحظات:</u>

1- يقطع منحنى الناتج الحدي منحنى الناتج المتوسط عندما يبلغ منحنى الناتج المتوسط PM_L أقصاه أي: $PM_L = P_{mg_L}$ أو $MAX: PM_L$.

2- تعتبر المنطقة II أحسن منطقة للإنتاج وتسمى المنطقة الاقتصادية للإنتاج لأن كل من الإنتاجية الحدية للعمل ورأس المال متناقصتين لكن موجبتين أي: $P_{m_L} > 0$ و $P_{mg_K} > 0$.

3- يبلغ الناتج الكلي أقصاه عندما تنعدم الإنتاجية الحدية للعمل أي $MAX: Q = PT_L \Rightarrow P_{mg_L} = 0$.

4- يبدأ الناتج الكلي بالزيادة المتناقصة عندما تكون الإنتاجية الحدية للعمل في أقصاها أي: MAX: P_{m_L} (أي عند نقطة الانعطاف).

5- يبدأ قانون تناقص الغلة مفعوله عندما يبدأ الناتج الحدي للعمل P_{mg_L} بالتناقص (الناتج الكلي يبدأ بالزيادة المتناقصة).

من الشكل السابق يبدأ عند $L = 4$.

المرونات الجزئية للإنتاج:

وهي مقياس للحساسية حيث أنها تقيس نسبة تغير الإنتاج إذا غيرنا نسبة أحد عناصر الإنتاج (مثلا العمل بـ 1%)، وتساوي إلى التغير النسبي للإنتاج على التغير النسبي للعمل وتكتب.

$$e_L = \frac{\Delta Q\%}{\Delta L\%} = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial L}{L}} = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} \quad / \quad P_{mg_L} = \frac{\partial Q}{\partial L}, PM_L = \frac{Q}{L} \Rightarrow \frac{L}{Q} = \frac{1}{PM_L}$$

وعليه يمكن أن نكتب: $\boldsymbol{e_L = \frac{}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{P_{mg_L}}{PM_L} = \frac{\text{الناتج الحدي للعمل}}{\text{الناتج المتوسط للعمل}}}$

$$\boldsymbol{e_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{P_{mg_K}}{PM_K} = \frac{\text{الناتج الحدي لرأس المال}}{\text{الناتج المتوسط لرأس المال}}}$$

ومما سبق يمكن أن نكتب:

- $e_L > 1 \Longleftarrow$ الإنتاج مرن أي: $P_{m_L} > PM_L$ وعليه تكون PM_L (الإنتاجية المتوسطة للعمل) متزايدة.
- $e_L = 1 \Longleftarrow$ الإنتاج متكافئ المرونة أي: $P_{m_L} = PM_L$ وعليه تكون متساوية مع P_{mg_L} حيث تكون PM_L في أقصاها.
- $e_L < 1 \Longleftarrow$ الإنتاج غير مرن أي $P_{mg_L} < PM_L$ وعليه تكون متناقصة.

<u>ملاحظة:</u> قانون الغلة المتناقصة (الغلة غير النسبية) ينطبق على كل من الزراعة والصناعة وليس على الزراعة فقط، كما اعتقد الكتاب الكلاسيك وقد استغلت الرأسمالية في القرن 19 م، فكرة انطباق هذا القانون على الزراعة للتخلص من مسؤولية مشكل الفقر، وذلك بإظهار أن أسباب هذه المشكلة تكمن في أن تكاثر بني الإنسان أكبر من طاقة الأرض على الإنتاج، وأنه لا علاقة لمشكلة الفقر بالنظام القائم آنذاك (نظرية روبرت مالتوس).

تمرين: إذا كانت دالة الإنتاج من الشكل: $F(K.L) = 10KL^2 - K^3.L^3$.

1- إذا كان رأس المال ثابتا ويساوي $K = 1$، ما هو عدد العمال الذي يضمن أقصى إنتاج كلي (إنتاجية كلية).
2- انطلاقا من أي قيمة يزداد الناتج الكلي بمعدل متناقص.
3- ما هو عدد العمال عند نقطة تعادل الناتج الحدي للعمل mg_L والناتج المتوسط PM_L.
4- أحسب المرونة الجزئية للعمل عند $L = 2$ وفسرها.
5- حدد مناطق الإنتاج.
6- متى يبدأ قانون تناقص الغلة مفعوله وفيما يفيدنا.

<u>الحل:</u>

1- عندما $K = 1 \Longleftarrow Q = F(L) = 10 \quad ^2 - \quad ^3$

عدد العمال الذي يضمن أقصى ناتج كلي:

$$MAX: Q \Rightarrow Q' = P_{mg_L} = 0 \Rightarrow 20\,L - 3\,L^2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} L = 0 & \text{مرفوض} \\ L = \frac{20}{3} & \text{مقبول} \end{cases}$$

2- عندما يبدأ الناتج الكلي بالزيادة بمعدل متناقص فإن الناتج الحدي للعمل يكون في أقصاه أو المشتقة الثانية للناتج الكلي تساوي الصفر.

$$MAX: P_{mg_L} \Rightarrow (P_{mg_L})' = 0 \Rightarrow 20 - 6\,L = 0 \Rightarrow L = \frac{20}{6}$$

3- عدد العمال عند نقطة تعادل P_{mg_L} و PM_L أي: $PM_L = P_{mg_L}$ أو $MAX: PM_L$

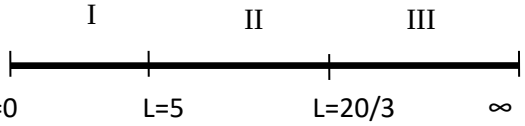
$$MAX: PM_L \Rightarrow (PM_L)' = 0 \;/\; PM_L = \frac{Q}{L} = \frac{10\,L^2 - L^3}{L} = 10\,L - L^2$$

$$\Rightarrow \left(10\,L - L^2\right)' = 0 \Rightarrow 10 - 2L = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L = 5}$$

4- المرونة الجزئية للعمل أي: $e_L = \frac{P_{mg_L}}{PM_L} = \frac{20\,L - 3\,L^2}{10\,L - L^2} = 1{,}75$

عندما يزيد العمل بـ 1% فإن الناتج الكلي يزيد بـ 1,75%.

5- مناطق الإنتاج:



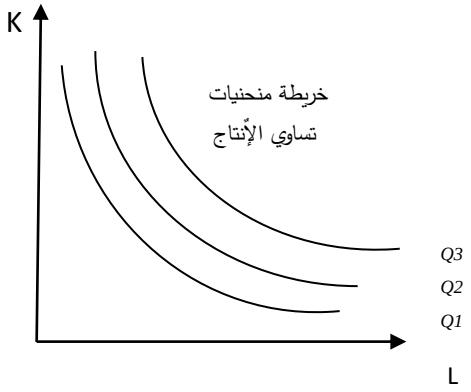
6- يبدأ قانون تناقص الغلة مفعوله عندما يبدأ الناتج الحدي بالتناقص (الناتج الكلي يبدأ بالزيادة المتناقصة) أي عند: $L = \frac{20}{6}$ ويفيدنا في تحديد مناطق الإنتاج.

تحليل دالة الإنتاج في المدى الطويل (دالة إنتاج بمتغيرين).

في المدى الطويل نفرض أن كل عناصر الإنتاج قابلة للتغيير ومن ثم يتغير مستوى الإنتاج ، نذكر هنا أن دالة الإنتاج عبارة عن "ملخص" لكل الطرق الممكنة لصنع منتوج ما، إن مشكل المنتج هو اختيار أحسن توليفة لعناصر الإنتاج من بين كل التوليفات الممكنة والتي تحقق له أعظم ربح أو أدنى تكلفة ممكنة تحت القيود التقنية والاقتصادية، تتمثل القيود التقنية في دالة الإنتاج والقيود الاقتصادية في أسعار عوامل الإنتاج السائدة في السوق وميزانية المنتج، يمكن أن توجد طريقة فعالة من الناحية التقنية ولكنها ليست مقبولة من الناحية الاقتصادية لأنها مكلفة.

1- تعاريف:

- **مساحة دالة الإنتاج "La surface de production"**: ليكن لدينا: $Q = f(K, L)$، إذا مثلنا هذه الدالة هندسيا فإنها تمثل مساحة الإنتاج في الفضاء ذو ثلاث أبعاد، ونظرا لصعوبة دراسة الدالة ذات متغيرين لأننا في الفضاء ذو ثلاث أبعاد، نلجأ إلى طريقة أسهل وهي تثبيت أحد المتغيرات الثلاث (إما Q أو K أو L) حتى نتمكن من الانتقال من الفضاء ذو ثلاث أبعاد (مساحة الإنتاج) إلى الفضاء ذو بعدين (منحنى تساوي الإنتاج).
- **منحنى تساوي الإنتاج:** هو عبارة عن النقاط التي تمثل التوليفات بين رأس المال- العمل والتي تعطي نفس مستوى الإنتاج، كما في الشكل الآتي:



إن منحنى تساوي الإنتاج يمثل هندسيا إسقاط على مستوى القاعدة (L ,K) تقاطع مساحة الإنتاج والمستوى الموازي لمستوى القاعدة والمقابل لكمية معينة من الإنتاج، إن منحنى تساوي الإنتاج يعكس فكرتين أساسيتين.

أ- الميل السالب للمنحنى الذي يعبر على فكرة الإحلال الممكن بين عناصر الإنتاج لإنتاج نفس المستوى من الناتج.

ب- تحدب المنحنى نحو نقطة الأصل يعبر عن المعدل الحدي للإحلال التقني المتناقص.

- **المعدل الحدي للإحلال التقني ($TMST$)**: يقيس كمية الوحدات من عنصر الإنتاج التي يمكن إضافتها أو طرحها للحفاظ على ثبات مستوى الإنتاج بعد طرح أو إضافة وحدة واحدة من عنصر الإنتاج الأخر.

في الحالة المتقاطعة: $TMST_{L,K} = \left|\frac{\Delta K}{\Delta L}\right| = -\frac{\Delta K}{\Delta L}$

في الحالة المستمرة: $TMST_{L,K} = \left|\frac{dK}{dL}\right| = -\frac{dK}{dL}$

أما: $TMST_{K,L} = \left|\frac{dL}{dK}\right| = \left|\frac{1}{\frac{dK}{dL}}\right| = \frac{1}{TMST_{L,K}}$

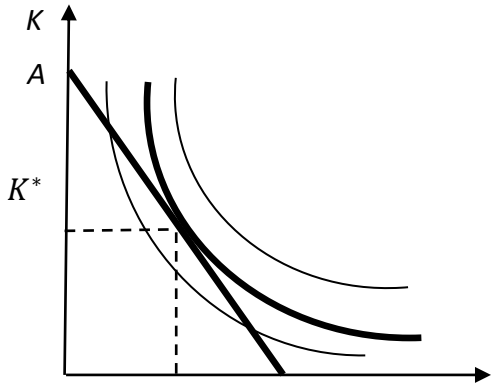
- **خط الميزانية أو خط التكاليف المتساوية:** عبارة عن النقاط التي تمثل التوليفات من رأس المال والعمل والتي تعطي نفس التكلفة الكلية. أي: $CT = w\,.\,L + r\,.\,K$ حيث: (CT: التكلفة الكلية، W: سعر العمل، r: سعر رأس المال).

إذا كان C معطى (ميزانية المنتج أو التكلفة الكلية معطاة) أي: $C = C_0$، فإن: $C_0 = w.L + rK$ أو بشكل أكثر وضوحا تكتب معادلة التكلفة من الشكل: $K = -\frac{W}{r}\ .\ L + \frac{C_0}{r}$

إن المعادلة أعلاه هي معادلة خط الميزانية، في الشكل الآتي في الأسفل المستقيم "AB" يمثل خط الميزانية أو ما يسمى بخط التكاليف المتساوية، أما نسبة الأسعار أو ما يسمى بالسعر النسبي ($\frac{-W}{r}$) تمثل ميل هذا الخط.

2- **طريقة الإنتاج الأمثل "توازن المنتج":** إن هدف المنتج يكون إما تعظيم الإنتاج أو تدنية التكاليف، يختار الإستراتيجية الأولى عندما يكون مقيدا بالميزانية أي له مبلغ محدد يستثمره في الإنتاج، ويختار الإستراتيجية الثانية عندما يكون مقيدا بالإنتاج أي لا يمكن له بيع كمية من المنتوج تكون أكبر من مستوى معين، فعلى سبيل المثال إذا كان البيع بالطلبيات فلا يمكن له إنتاج كمية تفوق كمية هذه الطلبيات.

أ- **الطريقة الهندسية:** نقتصر هنا في هذا التحليل على تعظيم الإنتاج تحت قيد الميزانية حيث في الشكل أدناه فإن التوليفة من رأس المال والعمل التي تمثل النقطة a *والتي إحداثياتها* (L^*, K^*)، نقطة المماس بين خط الميزانية "AB" ومنحنى تساوي الإنتاج "Q_2" هي التوليفة الأمثل، أي التي تحقق أعظم إنتاج، بالطبع أي نقطة أخرى تحقق قيد الميزانية (تقع على خط الميزانية) لا يمكن لها أن تحقق إنتاج أكبر من النقطة a، فعلى سبيل المثال النقطتين b و c تحققان إنتاج قدره Q_1 وهو أقل من Q_2.



نقطة توازن المنتج

من الشكل أعلاه يمكن صياغة الشرط الأساسي للوصول إلى الحل الأمثل على النحو التالي: يصل المنتج إلى الإنتاج الأمثل عندما يتساوى المعدل الحدي للإحلال التقني مع نسبة أسعار عناصر الإنتاج أو ميل منحنى الناتج المتساوي يتساوى مع ميل خط التكلفة المتساوية (نقطة التلامس بين منحنى الناتج المتساوي وخط التكلفة وهي النقطة a في الشكل) أي: $\boldsymbol{\frac{dK}{dL} = -\frac{W}{r}}$

ب- الطريقة الرياضية: إن هدف المنتج يمكن التعبير عنه رياضيا كالآتي:

- في حالة تعظيم الإنتاج:

$$\begin{cases} MAX: X = f(K,L) \\ Slc: C_0 = rK + w.L \end{cases}$$

- في حالة تقليل التكاليف:

$$\begin{cases} Min: C = rK + w.L \\ Slc: X_0 = f(K,L) \end{cases}$$

إن طريقة تعظيم الإنتاج تحت قيد الميزانية أو تقليل التكاليف تحت قيد الإنتاج طريقتين متكافئتين نقتصر في التحليل الرياضي على الطريقة الأولى فقط ونتبع نفس البرهان بالنسبة لتدنية التكاليف تحت قيد الإنتاج، لحل هذه المسألة المثلوية، ندخل دالة لاغرانج **Lagrange**:

$$L = f(K,L) + \lambda\,(C - r.K - w.L)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - \lambda\ .r = 0 \Rightarrow \frac{(\frac{\partial f}{\partial K})}{r} = \lambda \\ \\ \frac{\partial L}{\partial L} = \frac{\partial F}{\partial L} - \lambda\ .w = 0 \Rightarrow \frac{(\frac{\partial f}{\partial F})}{w} = \lambda \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = C_0 - r.K - w.L = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{(\frac{\partial f}{\partial K})}{r} = \frac{(\frac{\partial f}{\partial F})}{w} \Leftrightarrow \frac{P_{mg_K}}{r} = \frac{P_{mg_L}}{w}$$

هذه النتيجة تمثل القاعدة الأساسية في نظرية الإنتاج: يصل المنتج إلى التوزيع الأمثل لميزانيته على عناصر الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية عندما تتساوى الإنتاجية الحدية لجميع هذه العناصر للدينار الأخير المنفق على أي منهم أي: $\boldsymbol{\frac{P_{mg_L}}{P_{mg_K}} = \frac{w}{r}}$.

ويمكن استخدام طريقة المشتقات الجزئية للوصول إلى نفس النتيجة، حيث أنه على طول منحنى تساوي الإنتاج: تفاضل الإنتاج (Q) يساوي الصفر: $Q = f(K,L)$

$$dQ = \frac{\partial f}{\partial K}dK + \frac{\partial f}{\partial L}dL = 0 \Rightarrow TMST_{L,K} = -\frac{dK}{dL} = \frac{(\frac{\partial f}{\partial L})}{(\frac{\partial f}{\partial K})}$$

والنتيجة التي نستخلصها نعبر عنها بالصيغة الرياضية الآتية:

$$\boldsymbol{TMST_{L,K} = -\frac{dK}{dL} = \frac{(\frac{\partial f}{\partial L})}{(\frac{\partial f}{\partial K})} = \frac{P_{mg_L}}{P_{mg_K}} = \frac{w}{r}}$$

نتيجة: يمثل المعدل الحدي للإحلال التقني ناقص ميل منحنى تساوي الإنتاج أو نسبة الإنتاجيات الحدية، إن النسبة $(\frac{P_{mg_L}}{P_{mg_K}}) = \frac{f'_L}{f'_K}$ متناقصة على طول منحنى تساوي الإنتاج من أعلى إلى أسفل وهذا راجع إلى قانون تناقص الغلة (العمل يزداد ورأس المال ينخفض) وبالتالي فإن المعدل الحدي للإحلال متناقص $(\frac{dTMST}{dL} < 0)$ وهذا ما يفسر تحدب منحنى تساوي الإنتاج نحو نقطة الأصل.

بناء على ما سبق، يمكن تلخيص شروط التوازن في الحالتين حالة تعظيم الإنتاج تحت قيد التكاليف أو تقليل التكاليف تحت قيد الإنتاج.

- في حالة تعظيم الإنتاج:

$$\begin{cases} \frac{P_{mg_L}}{P_{mg_K}} = \frac{w}{r} \dots\dots\dots 1 \\ C_0 = w.L + r.K \dots\dots 2 \end{cases}$$

نقوم بحل المعادلتين نحصل على الزوج (L,K) الذي يعظم الإنتاج.

- في حالة تقليل التكاليف:

$$\begin{cases} \frac{P_{mg_L}}{P_{mg_K}} = \frac{w}{r} \dots\dots\dots 1 \\ X_0 = f(K,L) \dots\dots 2 \end{cases}$$

نقوم بحل المعادلتين نحصل على الزوج (L,K) الذي يقلل التكاليف.

مثال: لتكن لدينا دالة الإنتاج التالية: $Q = f(K,L) = K.L$ وميزانية قدرها 20 ينفقها المنتج على الاستثمار.

أ- إذا كانت أسعار عناصر الإنتاج $w = 2$ و $r = 2$ فأوجد كمية الإنتاج المثلى.

ب- أوجد معادلة منحنى تساوي الإنتاج الذي يمر من نقطة التوازن.

ج- ما هي أدنى تكلفة لإنتاج 9 وحدات.

الحل:

أ- لإيجاد كمية الإنتاج المثلى، نحسب أولا كمية عناصر الإنتاج التي تعظم الإنتاج (نقطة توازن المنتج)، عن طريق شرطي التوازن للمنتج.

$$\begin{cases} \frac{P_{mg_L}}{P_{mg_K}} = \frac{w}{r} \\ C_0 = r.K + w.L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow K = L \dots\dots\dots 1 \\ 20 = 2K + 2L \dots\dots\dots 2 \end{cases}$$

نعوض المعادلة (1) في (2) نجد:

$$20 = 2K + 2K \Rightarrow 20 = 4K \Rightarrow \begin{cases} \bar{K} = 5 \\ \bar{L} = 5 \end{cases}$$

إذن نقطة توازن المنتج: $(\bar{K},\bar{L}) = (5,5)$.

الكمية المثلى للإنتاج هي: $\bar{Q} = K.L = 5.5 = 25$

ب- معادلة منحنى تساوي الإنتاج الذي يمر من نقطة التوازن.

$$Q = K.L = 25 \Rightarrow K = \frac{25}{L}$$

ج- أدنى تكلفة لإنتاج 9 وحدات هي: لدينا شرطي توازن المنتج.

$$\begin{cases} \frac{P_{mg_L}}{P_{mg_K}} = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow K = L \dots\dots\dots 1 \\ Q_0 = K.L \Rightarrow 9 = K.\ L \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 2 \end{cases}$$

نعوض (1) في (2) نجد:

$$9 = K.\ L \Rightarrow 9 = K.K \Rightarrow 9 = K^2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{K} = 3 \\ \bar{L} = 3 \end{cases}$$

نعوض في معادلة التكلفة فنجد: $C = w.L + r.K \Rightarrow C_0 = 2.3 + 2.3 \Rightarrow C_0 = 12$

ج- الأسلوب الثالث: تحقيق أقصى ربح ممكن.

يعرف الربح على أنه الفرق بين التكاليف والإيرادات أي: $\Pi = RT - CT$ ، حيث CT: التكاليف الكلية ، RT: الإيرادات الكلية ، Π: الربح.

من جانب آخر فإن: الإيرادات= سعر البيع X الكمية المباعة أي: $RT = P.Q$

أما التكاليف فتساوي: $CT = w\,.\,L + r\,.\,K$

$$\Pi = RT - CT$$
$$\Pi = P\,.\,Q - w\,.\,L - r\,.\,K \;\; / Q = f(K,L)$$
$$\Pi = P\,.\,f(K,L) - w\,.\,L - r\,.\,K$$

نقوم بالتفاضل فنجد:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = P\,.\,F'_L - \; w = 0 \Rightarrow P\,.\,F'_L = w \ldots\ldots\ldots 1$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = P\,.\,F'_K - \; r = 0 \Rightarrow P\,.\,F'_K = r \ldots\ldots\ldots 2$$

F'_L : الناتج الحدي العيني للعمل أو P_{mg_L}

F'_K: الناتج الحدي العيني لرأس المال أو P_{mg_K}

$P\,.\,F'_L$: الناتج الحدي للعمل بالقيمة وهو يقيس المعدل الذي يزيد به إيراد المنتج عند زيادة العمل بوحدة واحدة.

نستنتج من شروط الدرجة الأولى لتعظيم الربح أن يستخدم كل عنصر من عناصر الإنتاج إلى الحد الذي يتساوى عنده الناتج الحدي بالقيمة لكل عنصر مع سعره، كما يجب أن يتحقق الشرط الثاني وهو أن تكون المشتقة الثانية سالبة أي:

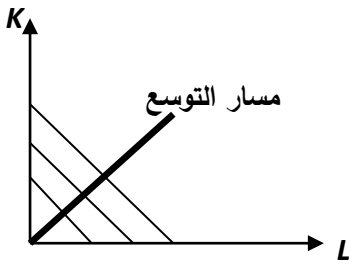
موجب دوما: $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} = .F''_L < 0 \Rightarrow F''_L < 0 \;/P$

موجب دوما: $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} = .F''_K < 0 \Rightarrow F''_K < 0 \;/P$

3- دالة مسار التوسع (المسار الأمثل):

إن نقطة تماس منحنى الناتج المتساوي مع خط التكلفة المستوية هي التي تحدد التوليفة المثلى (نقطة التوازن) من العمل ورأس المال ويسمى المستقيم الذي يصل بين مختلف نقاط التوازن بمسار التوسع (المسار الأمثل).

وهو المحل الهندسي لجميع التوليفات التوازنية من K وL لإنتاج مستويات مثلى من الإنتاج عندما تكون أسعار عناصر الإنتاج ثابتة، ومن ثم فهو يدلنا على تزايد الكميات من K و L عندما يزيد نشاط المؤسسة في المستقبل وهو دالة للكميات المستخدمة من K و L أي: $Q_0 = f(K\,,L)$



<u>ملاحظة1</u>: تستخرج معادلة مسار التوسع من شروط الدرجة الأولى لتعظيم الإنتاج أو من شروط الدرجة الأولى لتعظيم الربح أو من شرط توازن المنتج :($\frac{P_{mg_L}}{P_{mg_K}} = \frac{w}{r}$) وهي علاقة بين K و L.

<u>ملاحظة2</u>: يكون شكل معادلة مسار التوسع عبارة عن خط مستقيم في الدوال المتجانسة فقط (خط مستقيم).

4- دوال الطلب على عناصر الإنتاج.

إن الطلب على عناصر الإنتاج يكون من طرف المنتج ويرتبط الطلب على أي عنصر من عناصر الإنتاج بسعره وسعر المنتوج وأسعار عناصر الإنتاج الأخرى، فمثلا إذا زادت أجور البنائين فإن الطلب على آلات البناء ينتعش نتيجة إحلال الآلات محل العمال من طرف المقاول وذلك لتقليل التكاليف.

ويعبر عن دوال الطلب رياضيا كما يأتي:

$$\begin{cases} K^d &= f(w,r,P) \\ L^d &= f(w,r,P) \end{cases}$$

ملاحظة: يمكن الحصول على دوال الطلب على عناصر الإنتاج من شروط الدرجة الأولى لتعظيم الربح.

مثال: $Q = K.L$، أوجد دوال الطلب على عناصر الإنتاج.

$$\Pi = RT - CT = P\,.\,Q - w\,.\,L - r\,.\,K \quad \Big/ \; RT = P\,.\,Q$$
$$= P\,.\,K\,.\,L - w\,.\,L - r\,.\,K \quad \Big/ \; CT = w\,.\,L + r\,.\,K$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = P\,.\,K - \; w = 0 \Rightarrow P\,.\,K = w \; \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = P\,.\,L - \; r = 0 \Rightarrow P\,.\,L = r \; \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نقسم (1) على (2) نجد:

معادلة مسار التوسع. $\frac{K}{L} = \frac{w}{r} \;\Rightarrow\; K = \frac{w}{r}\,.\,L \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

بتعويض (3) في (1) نجد:

دالة الطلب على العمل : $P.\frac{w}{r}\,.\,L = w \Rightarrow \frac{P\,.\,L}{r} = 1 \Rightarrow P\,.\,L = r \Rightarrow \boldsymbol{L^d = \frac{r}{P}}$

بتعويض دالة الطلب للعمل في (3) نجد:

دالة الطلب على رأس المال: $\boldsymbol{K^d = \frac{w}{r}\,.\frac{r}{P} = \frac{w}{P}}$

يلاحظ من دالة الطلب على العمل (العمالة) أن العمل يتناسب عكسيا مع سعر المنتوج وهذا شيء معقول لأن ارتفاع سعر المنتوج يؤدي إلى التقليل من الطلب عليه وبالتالي ينخفض الطلب على العمل، أما العلاقة بين العمل وسعره فهي علاقة طردية وهذا غير مقبول من الناحية النظرية حيث إذا ارتفع سعر العمل فإن تكاليف الإنتاج ترتفع على العمل وهذا ما يسمى بأثر الإنتاج على العمالة أما الأثر الثاني على العمل فهو أثر الإحلال، فعند ارتفاع سعر العمل (العمالة) فإن المنتج يعوض العمالة برأس المال لأنه أصبح أرخص نسبيا.

5- مرونة الإحلال بين K و L.

على طول منحى تساوي الناتج يكون المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST$ متناقصا وكذلك النسبة $\frac{K}{L}$، إن النسبة $\frac{K}{L}$ تعبر عن كثافة رأس المال فإذا زادت هذه النسبة دل ذلك على أن المؤسسة تستعمل فنونا إنتاجية كثيفة رأس المال وإذا نقصت دل ذلك على أن المؤسسة تستعمل فنونا إنتاجية كثيفة العمل..

ومرونة الإحلال بين K و L تقيس نسبة التغير في كثافة رأس المال إذا تغير المعدل الحدي للإحلال الفني بـ 1% وتكتب رياضيا:

$$\sigma = \frac{\frac{d(\frac{K}{L})}{\frac{K}{L}}}{\frac{d\,TMST}{TMST}} = \frac{\frac{d(\frac{K}{L})}{\frac{K}{L}}}{\frac{d\,(\frac{w}{r})}{(\frac{w}{r})}} = \frac{\frac{d(\frac{K}{L})}{\frac{K}{L}}}{\frac{d\,(\frac{f'_L}{f'_K})}{(\frac{f'_L}{f'_K})}}$$

في هذه الحالة تبين لنا مرونة الإحلال ما هي نسبة تغير كثافة رأس المال إذا تغير السعر النسبي بـ 1%.

6- العلاقة بين الناتج الحدي والناتج المتوسط وقوانين الغلة.

لدينا: $e_K = \frac{P_{mgK}}{PM_K}$. $e_L = \frac{\text{الناتج الحدي للعمل}}{\text{الناتج المتوسط للعمل}} = \frac{P_{mgL}}{PM_L}$

إذا كانت المرونة اكبر من الواحد ⟸ غلة حجم متزايدة.

إذا كانت المرونة تساوي الواحد ⟸ غلة حجم ثابتة.

إذا كانت المرونة أقل من الواحد ⟸ غلة حجم متناقصة.

7- قوانين غلة الحجم (عوائد الحجم) أو مردوديات السلم Returns To Scale:

في المدى الطويل يمكن تغيير مستوى الإنتاج بتغيير جميع عناصر الإنتاج (حجم المصنع).

تتطرق النظرية الاقتصادية إلى حالة تغير عناصر الإنتاج بنفس النسبة وفي آن واحد، ويشير مصطلح غلة الحجم إلى التغير في الإنتاج الناتج عن تغير عوامل الإنتاج بنفس النسبة في المدى الطويل بعبارة أخرى هو المعدل الذي تزيد به المخرجات (الناتج) عندما تزيد عوامل الإنتاج بنفس النسبة أي زيادة الكفاءة الإنتاجية نتيجة تغير عوامل الإنتاج.

7-1- الدوال المتجانسة:

في الغالب يستخدم الاقتصاديون الأسلوب الرياضي للتعبير عن قوانين غلة الحجم بواسطة ما يعرف بالدوال المتجانسة للتعرف على طبيعة غلة الحجم، اعتبر الدالة: $\boldsymbol{Q = f(K, L)}$

نقول أن هذه الدالة متجانسة من الدرجة n إذا كان من أجل كل عدد حقيقي موجب t تتحقق العلاقة الآتية:

$$\boldsymbol{Q' = f(tK, tL) = t^n\ f(K, L) = t^n\ .Q}$$

t: نسبة الزيادة ، n: درجة تجانس الدالة، $L, K > 0$.

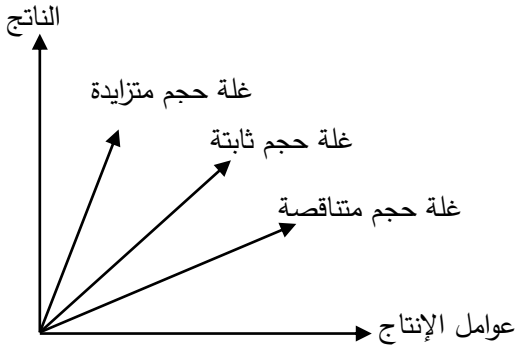
نميز هنا ثلاث حالات لغلة الحجم:

- **غلة الحجم المتزايدة:** عندما يكون التغير في الناتج أكبر من التغير في عوامل الإنتاج المستعملة أي زيادة عوامل الإنتاج بنفس النسبة يؤدي إلى زيادة الناتج بنسبة أكبر (في هذه الحالة تتناقص التكاليف الحدية والتكاليف المتوسطة) ومن ثم يمكن الحديث عن اقتصاديات الحجم.

$$Q' = t\ f(K, L) = f(tK, tL) < t^n\ f(K, L) = t^n\ .Q$$

- **غلة حجم ثابتة:** حيث تؤدي زيادة عوامل الإنتاج بنفس النسبة إلى زيادة الناتج بنفس النسبة.

- **غلة حجم متناقصة:** حيث تؤدي زيادة عوامل الإنتاج بنفس النسبة إلى زيادة الناتج بنسبة أقل (في هذه الحالة تزيد التكاليف الحدية والتكاليف المتوسطة).



مثال: $\boldsymbol{Q = f(K,L) = L^2 + 4\,KL + 3\,K^2}$

هل هذه الدالة متجانسة ومن أي درجة، ثم حدد طبيعة غلة حجم الدالة (درجة تجانس الدالة).

بضرب كل عامل من عوامل الإنتاج في عدد حقيق موجب t نجد:

$$Q' = (tK, tL) = (tL)^2 + 4\,tK\,.\,tL + 3(tK)^2$$
$$Q' = t^2(L^2 + 4\,KL + 3\,K^2) = t^2\,.\,Q$$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية وعليه فإن غلة الحجم متزايدة.

بصفة عامة تكون غلة حجم الدالة متزايدة من أجل: n>1، وتكون متناقصة من أجل: n<1، وتكون ثابتة من أجل: n=1، في هذه الحالة تكون الدالة خطية وهي المعتمدة في التحليل الاقتصادي.

2-7- خصائص دوال الإنتاج المتجانسة:

إن الدوال المتجانسة تتميز من الناحية الرياضية بخاصيتين:

- الخاصية الأولى: إن المشتقات الجزئية الأولى لدالة متجانسة من الدرجة n تعتبر دوال متجانسة من الدرجة n-1.

من الدالة السابقة نجد:

$$f'_K = 4\,L + 6\,K \Rightarrow f'_K(t\,K, tL) = t\,(4\,L + 6\,K)$$
$$f'_K = 2\,L + 4\,K \Rightarrow f'_K(t\,K, tL) = t\,(2\,L + 4\,K)$$

أي أن المشتقات الجزئية الأولى دوال متجانسة من الدرجة 1 أي 1= 1-2.

- الخاصية الثانية: الدوال المتجانسة تحقق متطابقة أيلر L'indentité d'Euler والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{K\,.\,f'_K + L\,.\,f'_L = n\,.\,f(K,L) = n\,.\,Q}$$

من الدالة السابقة نجد: $K\,.\,(4\,L + 6\,K) + L\,.\,(2\,L + 4\,K) = 4KL + 6\,K^2 + 2\,L^2 + 4\,KL$

$$= 2\,L^2 + 8\,KL + 6\,K^2 = 2(L^2 + 4\,KL + 3\,K^2) = 2\,.\,Q$$

<u>ملاحظة 1</u>: عندما تكون دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة 1 في هذه الحالة

تساوي مجموع حاصل ضرب الكميات المستخدمة من عنصري الإنتاج في النواتج الحدية لهذه العناصر، فإذا Qالكمية المنتجة من السلعة كانت المؤسسة تدفع أجرا لكل عنصر إنتاج حسب إنتاجيته الحدية الطبيعية فإن التكلفة الكلية لعناصر الإنتاج تساوي قيمة الإنتاج.

إذن قيمة الإنتاج تكفي فقط لتغطية تكلفة عناصر الإنتاج وهذا ما يسمى بقاعدة نفاذ المنتوج La Règle de l'épuisement du produit.

ملاحظة 2: الفرق بين وفورات الحجم (اقتصاديات الحجم) وغلة الحجم.

وفورات الحجم (اقتصاديات الحجم)	غلة الحجم (عوائد الحجم)
• تربط بين تكلفة إنتاج الوحدة بالنسبة للكميات المنتجة. • تشير إلى انخفاض تكلفة الوحدة المنتجة عند زيادة الإنتاج في الأجل الطويل نتيجة الوفورات التي تحصل عليها.	• تمثل التغير في الناتج الكلي نتيجة تغير عوامل الإنتاج. • تربط الكميات المنتجة بالنسبة لحجم عوامل الإنتاج. • تمثل زيادة الكفاءة الإنتاجية.

ملاحظة 3: تبذيرات الحجم (زيادة متوسط تكلفة الوحدة عند زيادة النشاط) عكس وفورات الحجم.

حالة خاصة: دوال الإنتاج كوب– دوقلاس COBB -Dauglas.

تعتبر دوال كوب دوقلاس من دوال الإنتاج الشهيرة وهي دالة رياضية اقتصادية تفسر السلوك الإنتاجي وعلاقته بعوامل الإنتاج.

وطبقت لأول مرة من طرف الاقتصادي بول دوقلاس والرياضي كوب سنة 1929 وشكلها الرياضي: $\boldsymbol{Q = A \,.\, K^{\alpha} \,.\, L^{\beta}}$

α ،β ثوابت، $L > 0$، $K > 0$، $A > 0$، $\alpha > 0$، $\beta > 0$.

A: معامل الحجم ويتحدد وفقا لطبيعة وحدات القياس المستخدمة.

α: مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال.

β: مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل.

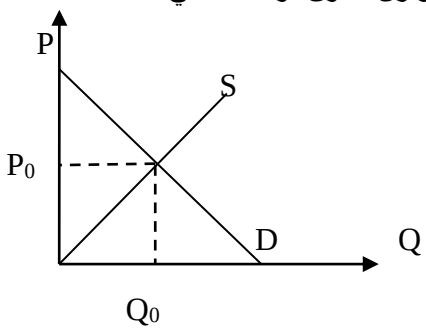
$\alpha + \beta$ تمثل درجة تجانس الدالة وتكون طبيعة غلة الحجم على أساس $\alpha + \beta$ ويمثل مجموع المرونتين الجزئيتين للإنتاج لرأس المال والعمل.

ودالة كوب دوقلاس تحمل الخصائص الآتية:

- دالة متجانسة ودرجة تجانسها 1 حيث: $\alpha + \beta = 1$.
- مشتقاتها الجزئية دوال متجانسة من الدرجة 0.
- تحقق دالة كوب دوقلاس متطابقة أيلر.

8- فائض المنتج:

وهو الفرق بين المبلغ الذي كان يقبل به البائع من بيعه لكمية معينة من السلعة والمبلغ الذي تلقاه فعلا من بيعه لتلك السلعة حسب سعر السوق. ويظهر بسبب رغبة بعض المنتجين في إنتاج سلعة ما بأسعار أقل من سعر توازن السوق، والمتمثل في المنطقة المخططة السفلى.



ويعطى بالعلاقة الرياضية الآتية:

$$\boldsymbol{S\,P = P_0\,Q_0 - \int_0^{Q} f(Q)dQ}$$

مثـال: لتكن دالة العرض: $\boldsymbol{P = 2\,Q}$

- أحسب فائض المنتج، حيث سعر توازن السوق $P = 8$

الحل:

فائض المنتج:

$$\boldsymbol{S\,P} = 8\,.\,4 - \int_0^4 2\,Q\,dQ = 32 - \,[Q^2]_0^4 = 32 - 16 = 16$$

أو يحسب عن طريق مساحة المثلث المخطط أي:

مساحة المثلث: = $\frac{4\,.8}{2} = 16$