Chapitre 3

Résolution de Systèmes Linéaires - Méthodes Itératives

3.1 Introduction

L'idée des méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires est de construire une suite convergente $x^{(k)}, k \in \mathbb{N}$ de vecteurs vérifiant :

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x \tag{3.1}$$

où x est la solution du système 2.1. Dans ce chapitre, on va présenter des méthodes itératives parmi les plus simples à mettre en oeuvre, à savoir les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel. Dans ces méthodes, qualifiées de méthodes itératives, la suite $x^{(k)}, k \in \mathbb{N}$ est obtenue, à partir d'un vecteur initial arbitraire $x^{(0)}$, par une relation de récurrence de la forme

$$x^{(k+1)} = B \times x^{(k)} + c, \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

où la matrice carrée B, appelée matrice d'itération de la méthode, et le vecteur c dépendent de la matrice A et du second membre b du système à résoudre. Pour une matrice pleine, le coût de calcul de ces méthodes est de l'ordre de $O(n^2)$ opérations à chaque itération. Alors que le coût total d'une méthode directe pour la résolution d'un système linéaire à n équations et n inconnues est de l'ordre de $O(n^3)$ opérations. Ainsi, une méthode itérative ne sera compétitive que si elle converge en un nombre d'itérations indépendant de, ou bien croissant de manière sous-linéaire avec, l'entier n. Cependant, les méthodes directes peuvent s'avérer particulièrement coûteuses pour les grandes matrices et les méthodes itératives sont souvent associées à la résolution de ce type de systèmes linéaires.

3.2 Généralités

Dans cette section, nous abordons quelques aspects généraux sur les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires et les outils mathématiques utilisés pour démontrer leurs propriétés. Les méthodes qu'on va présenter dans ce chapitre sont basé sur la méthode de point fixe qui sert à la résolution d'équations non linéaires. Nous allons commencer dans la section suivante par la présentation de la méthode de point fixe, puis nous passons aux méthodes itératives de résolution d'un système linéaire.

3.3 Méthode de Point Fixe

On appelle point fixe d'une fonction g(x) définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou n'importe quelle application définie d'un ensemble E dans lui même), toute valeur x pour laquelle :

$$g(x) = x \tag{3.3}$$

3.3.1 Suite Récurrente et Convergence

Étant donné une fonction $g : I \longrightarrow I$, et une suite numérique (u_n) définie par sa valeur initiale u_0 et la relation de récurrence $u_{k+1} = g(u_k)$. Si (u_n) converge vers un élément α de I lorsque $k \to \infty$, alors cette limite α est nécessairement un point fixe de la fonction g.

Une telle suite ne converge pas forcément, même si la fonction g possède un ou plusieurs points fixes. Pour assurer la convergence de cette suite, la fonction g doit être contractante.

3.3.2 Fonction Contractante

On dit qu'une fonction g est k-contractante sur un intervalle I si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1. $g(I) \subset I$.
2. $\exists k$ tel que :
   - $0 \leq k < 1$.
   - $\forall x, y \in I$, nous avons :

$$|g(x) - g(y)| \leq k \cdot |x - y| \tag{3.4}$$

La relation 3.4 est vraie si la dérivée de la fonction g sur l'intervalle I est inférieure à 1 en valeur absolue. Autrement dit :

$$g'(x) < 1, \forall x \in I \tag{3.5}$$

Théorème 3.1. Étant donné une fonction $g : I \to I$ contractante et ayant un point fixe α sur l'intervalle i. La série (u_n) définie par récurrence avec la relation $u_{k+1} = g(u_k)$ converge toujours vers α le point fixe de la fonction g quelque soit la valeur initiale $u_0 \in I$.

Démonstration. On pose $e_0 = |u_0 - \alpha|$. et $e_n = |u_n - \alpha|, \forall n$. La méthode de point fixe converge si et seulement si :

$$\lim_{k\to\infty} |e_k| = 0. \tag{3.6}$$

Ce qui implique :

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \alpha. \tag{3.7}$$

vu que alpha est le point fixe de g nous avons

$$g(\alpha) = \alpha, \tag{3.8}$$

et donc nous avons

$$\begin{aligned} e_k &= |u_k - \alpha| && (3.9)\\ &= |g(u_{k-1}) - g(\alpha)| && (3.10) \end{aligned}$$

Parce que la fonction g est contractante, $\exists 0 \leq q < 1$ tel que

$$|g(u_{k-1}) - g(\alpha)| \leq q \cdot |u_{k-1} - \alpha| = q \cdot |e_{k-1}| \tag{3.11}$$

Ce qui signifie que $\forall k$

$$|e_k| \leq q \cdot |e_{k-1}|. \tag{3.12}$$

Nous pouvons facilement démontrer par récurrence que

$$|e_k| \leq q^k \cdot e_0, \tag{3.13}$$

et donc que

$$\lim_{k\to\infty} |e_k| = 0. \tag{3.14}$$

■

3.3.3 Résolution d'équations

Il est possible d'utiliser la méthode de point fixe pour résoudre les équations non linéaires (ou même linéaires) de la forme $f(x) = 0$. Il est nécessaire de transformer l'équation $f(x) = 0$ en équation équivalente $g(x) = x$, puis chercher α le point fixe de la fonction g.

Étant donné une fonction f, plusieurs choix sont possible pour la fonction g. Il est nécessaire de prendre une fonction g qui est contractante ($|g'(x)| < 1$).

3.4 Les Normes

La notion de norme est utile en algèbre linéaire numérique pour quantifier l'erreur de l'approximation de la solution d'un système linéaire par une méthode itérative, on fait appel à une norme dite vectorielle ou matricielle.

On dit qu'une application $\| \cdot \|$ de E dans $\mathbb{R}$ (avec $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^{n\times n}$) est une norme sur si :

1. $\| v \| \geq 0, \forall v \in E$.
2. $\| v \| = 0$ si et seulement si $v = 0$.
3. $\| \alpha v \| = \alpha \| v \|$.
4. $\forall u, v \in E, \| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$.

La distance entre deux éléments appartenant à E peut être calculée avec la formule :

$$\forall u, v \in E, d(u, v) = \| u - v \| \tag{3.15}$$

Normes Vectorielles

Pour tout nombre réel p l'application définie dans l'équation 3.16 est une norme.

$$\| v \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{1/p} \tag{3.16}$$

Les normes vectorielles les plus souvent utilisées sont :

$$\| v \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \tag{3.17}$$

$$\| v \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2} \tag{3.18}$$

$$\| v \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i| \tag{3.19}$$

Exemple :

Soit le vecteur v suivant :

$$v = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

— $\| v \|_1 = |-7| + |-1| + |3| = 11$.
— $\| v \|_2 = \sqrt{|-7|^2 + |-1|^2 + |3|^2} = 7.68$.
— $\| v \|_\infty = 7$.

Normes Matricielles

Nous introduisons ici des normes sur les matrices. Dans toute la suite, on ne va considérer que des matrices à coefficients réels. En plus des propriétés habituelles d'une norme, on demande à une norme matricielle de satisfaire la propriété de sous-multiplicativité suivante :

$$\| AB \| \leq \| A \| \| B \| \tag{3.20}$$

On dit qu'une norme matricielle et deux normes vectorielles sont consistantes si pour un vecteur v et une matrice M nous avons :

$$\| Mv \| \leq \| M \| \| v \| \tag{3.21}$$

pour chaque norme matricielle, il existe au moins une norme vectorielle avec laquelle elle est consistante. Ainsi, il n'est pas toujours nécessaire de préciser explicitement la norme vectorielle avec laquelle la norme matricielle est consistante.

Les normes matricielles les plus utilisées sont :

$$\| M \|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |m_{i,j}| \tag{3.22}$$

$$\| M \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|^2} \tag{3.23}$$

$$\| M \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \tag{3.24}$$

Exemple :

Soit la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \\ 4 & -7 & -9 \end{pmatrix}$$

nous avons :

- $\| M \|_1 = 23$
- $\| M \|_2 = 17.69$
- $\| M \|_\infty = 20$

3.5 Remarques sur les Méthodes Itératives

Nous expliquons dans cette section les conditions qu'une méthode itérative doit satisfaire pour converger vers la solution du système. On dit qu'une méthode itérative est convergente, si et seulement si pour chaque vecteur initial $x_{(0)}$, elle converge vers la solution du système x.

On dit qu'une méthode itérative de la forme 3.2 est consistante, si la matrice B et le vecteur c sont choisis tel que pour la solution du système x nous avons :

$$x = Bx + c$$

en d'autres termes, la solution du système est obtenue lorsque $x^{(k+1)} = x^{(k)}$.

Si la solution x existe, on appelle erreur à l'itération k la valeur :

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x. \tag{3.25}$$

Théorème 3.2. Une méthode itérative consistante est convergente s'il existe une norme matricielle $\| \cdot \|$ tel que

$$\| B \| < 1 \tag{3.26}$$

Démonstration. Posons x la solution du système $Ax = b$, $x^{(0)}$ la solution initiale devinée pour notre méthode itérative et pour chaque k, $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$. Soit $e^{(k)} = |x - x^{(k)}$ l'erreur à l'itération k. Comme nous avons vu pour le théorème de point fixe, une méthode itérative est convergente si et seulement si :

$$\lim_{k \to \infty} e^{(k)} = 0. \tag{3.27}$$

Vu que la méthode itérative est consistante, nous avons $x = Bx + c$ et donc

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= x^{(k+1)} - x \\ &(Bx^{(k)} + c) - (Bx + c) \\ &B(x^{(k)} - x) \\ &Be^{(k)} \end{aligned} \tag{3.28}$$

On déduit que pour chaque $k \geq 1$:

$$e^{(k)} = B^k \times e^{(0)} \tag{3.29}$$

S'il existe une norme matricielle tel que $\| B \| < 1$, nous avons :

$$\lim_{k \to \infty} \| B^k \| \leq \lim_{k \to \infty} \| B \|^k = 0. \tag{3.30}$$

Et il existe toujours une norme vectorielle consistante avec la norme matricielle précédente tel que :

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \| e^{(k)} \| &\leq \lim_{k \to \infty} \| B^k \| \times \| e^{(0)} \| \\ &= 0 \times \| e^{(0)} \| = 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

quelque soit la valeur de $e^{(0)}$ (et par conséquent $x^{(0)}$).

■

Il est aussi possible de démontrer que les méthodes itératives de cette forme convergent lorsque le rayon spectral (le module max des valeurs propres de la matrice) de la matrice d'itération B est inférieur à 1. Néanmoins, $\forall\lambda$ valeur propre de la matrice B nous avons

$$\| B \| \geq \lambda \tag{3.32}$$

quelque soit la norme utilisée (plus sur les valeurs propres dans le chapitre 4). Il est donc suffisant de trouver une seule norme tel que $\| B \| < 0$ pour assurer la convergence de la méthode itérative.

En pratique, il est possible d'arrêter la méthode itérative lorsque la norme du vecteur d'erreur dans 3.25 passe en dessous d'un seuil de tolérance fixé ϵ. Cependant, on ne sait généralement pas évaluer l'erreur, puisque la solution x n'est pas connue, et il faut donc avoir recours à un autre critère d'arrêt. Un autre critère parfois utilisé dans la pratique est basé sur l'incrément est donné par :

$x^{(k+1)} - x(k) \leq \epsilon$.

Les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel que nous allons présenter font partie de la famille de méthodes itératives de la forme :

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \tag{3.33}$$

basées sur la décomposition de la matrice A,

$$A = M - N \tag{3.34}$$

avec M une matrice inversible. Pour que la formule 3.33 soit utile en pratique, il faut par ailleurs que la matrice M soit **facilement inversible**, c'est-à-dire que l'on doit pouvoir résoudre simplement et à faible coût un système linéaire ayant M pour matrice de coefficients. On verra en effet que, pour les méthodes précitées, M est une matrice respectivement diagonale et triangulaire inférieure. Comme nous l'avons montré dans le théorème 3.2 la convergence d'une méthode consistante dépend de la norme matricielle de sa matrice d'itération.

3.6 Méthode de Jacobi

Observons que, si les coefficients diagonaux de la matrice A ne sont pas nuls, il est possible d'isoler la i^{ieme} inconnue dans la i^{ieme} équation de 2.2, pour $1 \leq i \leq n$. On obtient alors le système linéaire équivalent :

$$\begin{cases} x_i = \frac{1}{a_{i,i}} \times \left(b_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{i,j} x_j \right), i = 1 \cdots n \end{cases} \tag{3.35}$$

Le méthode de Jacobi se base sur ces relations pour construire, à partir d'un vecteur initial $x^{(0)}$ donné, une suite $x^{(k)}, k \in \mathbb{N}$ par récurrence

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \times \left(b_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \right), i = 1 \cdots n \end{cases} \tag{3.36}$$

l'équation 3.36 est équivalente à la relation de reccurence suivante 3.37

$$x^{(k+1)} = M^{-1} \times (b - N \times x^{(k)}) \tag{3.37}$$

ce qui équivalent à la décomposition 3.34 de la matrice A avec $M = D$ et $N = E + F$, où D est la matrice diagonale dont les coefficients sont les coefficients diagonaux de A.

$$\begin{cases} d_{i,i} = & a_{i,i} \ pour \ 1 \leq i \leq n \\ d_{i,j} = & 0 \ pour \ i \neq j \end{cases} \tag{3.38}$$

E est la matrice triangulaire inférieure de coefficients

$$\begin{cases} e_{i,j} = & -a_{i,j} \ si \ i > j \\ e_{i,j} = & 0 \ sinon \end{cases} \tag{3.39}$$

et F est la matrice triangulaire supérieure tel que :

$$\begin{cases} f_{i,j} = & -a_{i,j} \ si \ i < j \\ f_{i,j} = & 0 \ sinon \end{cases} \tag{3.40}$$

On a ainsi $A = D - (E + F)$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & -a_{n,3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & 0 & -a_{2,3} & \cdots & -a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice d'itération est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (D-(E+F))x &= b \\ Dx-(E+F)x &= b \\ Dx &= (E+F)x+b \\ x &= D^{-1}(E+F)x+D^{-1}b \end{aligned}$$

Donc la méthode de Jacobi de la forme :

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + c_J \tag{3.41}$$

est consistante pour la matrice d'itération B_J et le vecteur x_J suivants :

$$\begin{cases} B_J = & D^{-1}(E+F) \\ c_J = & D^{-1}b \end{cases} \tag{3.42}$$

et elle est convergente s'il existe une norme matricielle tel que $\| B_J \| < 1$.

On note que la matrice diagonale D doit être inversible. Cette condition n'est cependant pas très restrictive dans la mesure où l'ordre des équations et des inconnues peut être modifié comme nous l'avons fait dans la méthode de Gauss avec échange.

3.6.1 Méthode de Jacobi avec "Sur Relaxation"

Une généralisation de la méthode de Jacobi est la méthode de sur-relaxation de Jacobi dans laquelle un paramètre de relaxation ω est introduit. La relation de récurrence sera écrite comme suit :

$$x^{(k+1)} = \omega D^{-1}(Mx + b) + (1 - \omega)x^{(k)} \tag{3.43}$$

cette méthode reste consistante car l'égalité dans la relation 3.43 est vérifiée pour $x^{(k+1)} = x^{(k)} = x$ (avec x étant la solution du système). Cette méthode est une généralisation de la méthode de Jacobi. Elle coïncide avec cette dernière pour $\omega = 1$. L'objectif est de choisir le bon paramètre de relaxation ω qui minimise la norme de la matrice d'itération $B_J(\omega)$ dans le but d'accélérer la convergence. La matrice d'itération de la méthode de sur relaxation est définie comme suit :

$$B_J(\omega) = \omega B_J + (1 - \omega I_n) \tag{3.44}$$

donc formellement, il faut trouver ω_0 tel que :

$$\| B_J(\omega_0) \| = inf(\| B_J(\omega) \|), \omega \in \mathbb{R} \tag{3.45}$$

3.7 Méthode de Gauss-Seidel

Remarquons à présent que, lors du calcul du vecteur $x^{(k+1)}$ par la formule de récurrence 3.36, les premières $(i+1)^{iemes}$ composantes de $x^{(k+1)}$ sont connues lors de la détermination de i^{ieme} pour $2 \leq i \leq n$. La méthode de Gauss-Seidel utilise ce fait en se servant des composantes du vecteur $x^{(k+1)}$ déjà obtenues pour le calcul des suivantes. On a alors :

$$\left\{ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \times \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \right), i = 1 \cdots n \right. \tag{3.46}$$

Ce qui est équivalent à mettre $M = D - E$ et $N = F$, Sous la forme matricielle ça donne :

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} \times (b - F \times x^{(k)}) \tag{3.47}$$

dans la décomposition 3.37, d'où la matrice d'itération associée :

$$B_{GS} = (D - E)^{-1} F \tag{3.48}$$

Pour que la méthode soit bien définie, il faut que la matrice D soit inversible, mais, là encore, cette condition n'est pas très restrictive en pratique. On peut également introduire dans cette méthode un paramètre de relaxation ω. On parle alors de méthode de sur-relaxation successive définie par :

$$\left\{ x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{i,i}} \times \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \right) + (1-\omega) x_i^{(k)}, i = 1 \cdots n \right. \tag{3.49}$$

3.8 Matrices à Diagonale Strictement Dominante

Dans le contexte des méthodes itératives, on est en mesure d'établir des résultats de convergence a priori pour de telles matrices. Si A est une matrice à diagonale strictement dominante par lignes, alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes.

Une matrice à diagonale strictement dominante par ligne est une matrice sur laquelle sur chaque ligne, la valeur absolue de l'élément de la diagonale est strictement supérieure à la somme des valeurs absolues des autres éléments de la même ligne. Formellement, la matrice A est à diagonale strictement dominante par ligne si :

$$|ai, i| > \sum_{j=1 j \neq i}^{n} |a_{i,j}| \tag{3.50}$$

Il est aussi possible de trouver une permutation de ligne pour trouver un système équivalent avec une matrice de coefficients à diagonale strictement dominante.