Chapitre 4

Calcul des Valeurs et Vecteurs Propres d'une Matrice

4.1 Introduction

Nous abordons dans ce chapitre le problème du calcul de valeurs propres (et, éventuellement, de vecteur propres d'une matrice d'ordre carrée d'ordre n. C'est un problème beaucoup plus difficile que celui de la résolution d'un système linéaire. En effet, les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique. On pourrait naïvement penser qu'il suffit de factoriser le polynôme caractéristique d'une matrice pour obtenir ses valeurs propres, on sait cependant qu'il n'est pas toujours possible d'exprimer les racines d'un polynôme à partir des ses coefficients et d'opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines). Par conséquent, il n'y a pas de méthode directe (c'est-à-dire fournissant le résultat en un nombre fini d'opérations) permettant le calcul des valeurs propres d'une matrice quelconque, on a donc recours à des méthodes itératives.

Parmi ces méthodes, il convient distinguer les méthodes qui permettent le calcul d'une valeur propre (en général celle de plus grand ou de plus petit module). C'est le cas par exemple de la méthode de la puissance, qui fournit une approximation d'un couple particulier de valeur et vecteurs propres et dont nous expliquerons dans ce chapitre.

4.2 Localisation Valeurs et Vecteurs Propres d'une Matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que λ est une valeur propre de A, et que x est un vecteur propre de A associé à la valeur λ si

$$Ax = \lambda x \tag{4.1}$$

Le calcul des valeurs propres de la matrice A revient à trouver la valeur de λ tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

Nous obtenons une équation de la forme

$$P(\lambda) = 0 \tag{4.3}$$

ou P est un polynôme de degré n (la même taille de la matrice A) appelé le polynôme caractéristique de A. Pour les petites matrices, il suffit donc de calculer les racines du polynôme P avec une méthode directe pour obtenir les valeurs propres de A.

Pour des plus grandes matrices, il est impossible de calculer les racines de P (les valeurs propres de A) en utilisant une méthode directes. Il est possible de calculer certaines racines de P en utilisant des méthodes itératives (comme la méthode de point fixe vu dans la section 3.3), d'autres méthodes itératives sans conçues spécifiquement pour le calcul des valeurs propres d'une matrices.

Exemple Soit la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont toutes les valeurs λ satisfaisant :

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_n) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ 6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (5 - \lambda)(-4 - \lambda) - 6 \times (-3) &= 0 \\ \lambda^2 + 4\lambda - 5\lambda - 20 + 18 &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de A est $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$. Dans ce cas, nous avons obtenu un polynôme de degré 2, donc il est simple de calculer ses racines en utilisant une méthode directe. Nous calculons d'abord Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2)(1) = 1 + 8 = 9$$

Les valeurs propres de A sont :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2} = -1\\ \lambda_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2} = 2\end{aligned}$$

4.2.1 Calcul des Vecteurs Propres

Pour calculer les vecteurs propres associés à une valeur propre λ il faut résoudre le système linéaire

$$(A - I_n\lambda)x = 0 \tag{4.4}$$

Notez que ma matrice de coefficients dans le système 4.4 a un déterminant nul par définition de la valeur propre λ. Par conséquent, ce système accepte un nombre infini de solutions. Donc on peut trouver plusieurs vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

Exemple Soit la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà vu dans l'exemple précédent que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$. Pour trouver les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 2$, nous allons résoudre le système linéaire

$$
\begin{aligned}
(A - \lambda_2 I)x &= 0 \\
\begin{pmatrix} 5-\lambda_2 & -3 \\ 6 & -4-\lambda_2 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 5-2 & -3 \\ 6 & -4-2 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} &= 0
\end{aligned}
$$

Nous observons ici que les deux équations obtenues sont équivalentes. Tout vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ avec $x_1 = x_2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_2 de la matrice A. Donc $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdots$ etc, sont tous des vecteurs propres de la matrice A associés à la valeur propre λ_2.

4.2.2 Vecteur Propre Normalisé

Nous disons qu'un vecteur propre v associé à la valeur propre λ d'une matrice A est un vecteur propre normalisé si

$$\| v \| = 1. \tag{4.5}$$

Sur l'exemple précédent, pour $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, le vecteur $v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$.

4.3 Méthode de La puissance

La méthode de la puissance est un algorithme permettant de calculer la valeur propre dominante d'une matrice. Étant donné une matrice A, on cherche sa valeur propre de plus grand module et un vecteur propre normalisé qui lui est associé. La méthode de la puissance permet de calculer la valeur propre dominante sans passer par le calcul du polynôme caractéristique ou ses racines, qui est difficile pour des matrice d'ordre supérieur à deux.

Soit A une matrice carrée d'ordre n, et soit $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit λ_{max} une valeur propre de A tel que $|\lambda_{max}| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$.

Pour chaque vecteur $w^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, et $w^{(0)} \neq 0$, la suite définie par la relation de récurrence

$$w^{(n+1)} = \frac{Aw^{(n)}}{\| Aw^{(n)} \|} \tag{4.6}$$

vérifie que

$$\lim_{k \to \infty} \| Aw^{(k)} \| = |\lambda_{max}|$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(Aw^{(k)})_j}{w_j^{(k)}} = \lambda_{max}, \forall j \in 1 \cdots n, \text{ (pour } w_j^{(k)} \neq 0)$$

4.3.1 Méthode de la Puissance Inverse

La méthode de la puissance est un algorithme permettant de calculer la valeur propre ayant le plus petit module. On part du principe que les valeurs propre de la matrice A^{-1} son l'inverse des valeurs propres de la matrice A. Par conséquent, la méthode de la puissance appliquée à la matrice A^{-1} converge vers la valeur propre dominante de A^{-1} qui vaut $1/\lambda_{min}$, tel que λ_{min} est la valeur propre ayant le plus petit module de la matrice A.

En d'autres termes, pour une matrice carrée A d'ordre n ayant les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$, avec λ_{min} la valeur propre tel que $|\lambda_{min}| = \min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$.

Pour chaque vecteur $w^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, et $w^{(0)} \neq 0$, la suite définie par la relation de récurrence

$$w^{(n+1)} = \frac{A^{-1}w^{(n)}}{\| A^{-1}w^{(n)} \|} \tag{4.7}$$

vérifie que

$$\lim_{k \to \infty} \| Aw^{(k)} \| = |\frac{1}{\lambda_{min}}|$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(Aw^{(k)})_j}{w_j^{(k)}} = \frac{1}{\lambda_{min}}, \forall j \in 1 \cdots n, \text{ (pour } w_j^{(k)} \neq 0)$$

Il faut noter qu'on pratique, il n'est pas nécessaire d'inverser la matrice A pour calculer la valeur de l'expression $A^{-1}w^{(n)}$ dans la relation 4.7, il est suffisant de résoudre le système $Ax = w^{(n)}$. Il est aussi fortement recommandé de calculer la factorisation LU (ou autre) de la matrice A avant de commencer le processus itératif afin de réduire la complexité des calculs effectués jusqu'à la convergence.

4.4 Matrice diagonalisable

La diagonalisation d'une matrice A reviens à trouver une matrice diagonale D qui est semblable à la matrice A.

4.4.1 Matrices Semblables

On dit qu'une matrice B est semblable à une matrice A, s'il existe une matrice inversible P tel que

$$A = PBP^{-1} \tag{4.8}$$

Exemple Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice A car il existe une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ tel que la relation 4.8 est satisfaite. Nous montrons par la suite dans la section 4.4.3 comment calculer l'inverse d'une matrice, dans ce cas il est facile de vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en vérifiant que $PP^{-1} = P^{-1}P = I_2$, et que $A = PBP^{-1}$

S'il existe une matrice B diagonale semblable à la matrice A, on dit que A est diagonalisable.

4.4.2 Diagonaliser une Matrice

Pour diagonaliser une matrice, nous allons d'abord calculer ses valeurs et vecteurs propres. Soit une matrice A d'ordre n, et soit $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ ses valeurs propres et $v_1, v_2 \cdots v_n$ les vecteurs propres qui leur sont accociés respectivement.

Si $\lambda_1 \neq \lambda_1 \neq \cdots \neq \lambda_n$, alors A est diagonalisable, et sa matrice semblable diagonale est constitué à partir de ses valeurs propres comme suit :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

Alors que la matrice P est constituée à partir des vecteurs propres v_i associés à chaque valeur propre λ_i dans le même ordre comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & \uparrow & \cdots & \downarrow \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

Notez que les valeurs propres peuvent être placées dans n'importe quel ordre sur la matrice D, mais le même ordre doit être pris pour les vecteurs propres respectifs sur la matrice P. Nous montrons par la suite comment calculer l'inverse d'une matrice dans le but de calculer la matrice P^{-1}.

4.4.3 Inverser une Matrice

Nous distinguons deux cas pour le calcul d'inverse d'une matrice, nous montrons premièrement le calcul l'inverse d'une matrice de taille 2, par la suite nous expliquons comment utiliser l'algorithme de pivot de Gauss vu dans la section 2.5 (aussi appelé élimination de Gauss-Jordan) dans le but de calculer l'inverse d'une matrice.

L'inverse d'une Matrice de Taille 2

Soit A une matrice carrée d'ordre 2, l'inverse de la matrice A peut être obtenu avec la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot com(A)^T, \tag{4.11}$$

tel que A^T indique la transposé d'une matrice A (échange de lignes et colonnes), et $com(A)$ est la comatrice de A. La comatrice d'une matrice carrée de taille 2 $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$com(A) = \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{2,1} \\ -a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

Exemple Inversons la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (utilisée dans l'exemple à la section 4.4). Pour transposer la matrice P nous utilisons la formule 4.11, nous avons donc :

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{det(P)} \cdot com(P)^T \\ &= \frac{1}{1 \times 2 - (-1) \times (-1)} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{2-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ P^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'élémination de Gauss-Jordan

Pour des matrices de tailles quelconque, nous utilisons l'élimination de Gauss-Jordan pour calculer l'inverse d'une matrice A de taille n. Nous allons appliquer le même processus de l'élimination de Gauss décrit dans la section 2.5 sur la matrice augmentée $[A|B]$ avec B qui vaut initialement la matrice identité I_n et avec deux différences principales à l'application de l'algorithme :

1. Les éléments de la diagonale de A doivent être mis à 1.
2. En élimine les éléments en dessous, mais également au dessus de la diagonale de A.

Nous allons donc initialement travailler sur la matrice augmentée suivante

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right). \tag{4.13}$$

Pour chaque élément de la diagonale de la matrice A, nous allons :

— D'abord diviser tous les éléments de la ligne par $a_{i,i}$, à l'issue de cette opération nous allons obtenir $a_{i,i} = 1$.

— Éliminer tous les éléments appartenant à la même colonne i sur des lignes différentes, pour ce faire, nous allons pour chaque ligne $j \in [1 \cdots n], j \neq i$, multiplier la ligne i par $a_{j,i}$ et la soustraire à la ligne j (exactement comme à l'élimination de Gauss dans la section 2.5, mais cette fois ci appliquer également aux éléments au dessus de la diagonale).

Après avoir appliquer ce processus à toutes les colonnes, nous allons finir avec une matrice augmentée de la forme $[I_n|B]$, ou plus précisément de la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{array}\right), \tag{4.14}$$

tel que $B = A^{-1}$.

Exemple Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, pour calculer l'inverse de A, nous allons définir la matrice $B = I_3$, puis travailler sur la matrice augmentée suivante :

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Nous travaillons d'abord sur le premier élément de la diagonale, nous allons donc diviser la première ligne par $a_{1,1} = 2$ pour obtenir le résultat suivant :

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Par la suite, nous allons multiplier la première ligne par $a_{2,1} = -1$ et la soustraire à la deuxième ligne. Puis la multiplier par $a_{3,1} = 3$ et la soustraire à la troisième ligne. Le résultat est le suivant.

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Après avoir terminé l'élimination des éléments non diagonaux de la première colonne, nous allons passer au deuxième élément diagonal. Divisons d'abord la deuxième ligne par 3/2 (la multiplier par 2/3), ce qui donne :

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Puis nous multiplions la deuxième ligne par $a_{1,2} = -1/2$ pour la soustraire à la première ligne, après par $a_{3,2} = 1/2$ pour la soustraire à la troisième ligne. Nous obtenons le résultat suivant.

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 & -5/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right),$$

Finalement, pour le dernier élément de la diagonale, divisons d'abord la dernière ligne par 7/3 pour obtenir :

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/7 & -1/7 & 3/7 \end{array}\right),$$

Puis éliminons les éléments de la troisième colonne de A qui sons à la première et la deuxième ligne. Nous obtenons :

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/7 & 2/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1/7 & 4/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & -5/7 & -1/7 & 3/7 \end{array}\right),$$

Nous arrivons donc à :

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 3/7 & 2/7 & 1/7 \\ -1/7 & 4/7 & 2/7 \\ -5/7 & -1/7 & 3/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4.5 À quoi sert la Diagonalisation

La diagonalisation d'une matrice A, ou en d'autres termes, la décomposition d'une matrice $A = PDP^{-1}$, peut servir dans plusieurs domaines d'applications de calcul scientifique, en particulier pour la simulation de certain phénomènes en physique. Mais nous allons dans cette section expliquer comment la diagonalisation d'une matrice peut simplifier ou au moins réduire la complexité de certains calculs vu dans les précédents chapitres de ce cours.

Calcul du déterminant Pour une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$ nous avons

$$det(A) = det(PDP^{-1}) = det(P) \times det(D) \times det(P^{-1}),$$

alors que $det(P^{-1}) = \frac{1}{det(P)}$, nous avons donc

$$det(A) = det(D) \tag{4.15}$$

Vu que D est une matrice diagonale, son déterminant peut être simplement obtenu en multipliant ses diagonaux (qui sont les valeurs propres de A), ce qui explique que le déterminant d'une matrice peut être obtenu en multipliant ses valeurs propres.

Résolution d'un Système Linéaire Étant donné une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$, le système $Ax = b$ peut s'écrire sous la forme

$$PDP^{-1}x = b.$$

La solution du système peut être obtenue simplement en $O(n^2)$ avec la formule :

$$x = PD^{-1}P^{-1}b.$$

Notez que la matrice P et son inverse son censé être déjà connus, et l'inverse la matrice diagonale D est obtenu en inversant chaque élément de la diagonale de D.

Calcul du *nième* d'une matrice Soit une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$, nous avons :

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k \\ &= PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1}. \end{aligned}$$

Vu que $P^{-1} \cdot P = I_n$, qui l'élément neutre de la multiplication matricielle, nous obtenons.

$$\begin{aligned} A^k &= PD \cdot D \cdot D \cdots DP^{-1}. \\ &= P \cdot D^k \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

Pour la matrice diagonale D, le calcul de D^k peut s'effectuer simplement en calculant la puissance de chaque élément de la diagonale.

Calcul de l'inverse Soit une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$, l'inverse de A est donné par

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = P^{-1}D^{-1}P \tag{4.16}$$

Nous rappelons que l'inverse de D est simplement obtenu en inversant ses éléments diagonaux.