Feuille de TP N°03 – Systèmes non Triangulaires

Exercice 01 : Calcul du déterminant

1. Ecrire une fonction Matlab récursive « determinant » qui prend comme argument une matrice carrée quelconque A et qui retourne comme résultat le déterminant de cette dernière.
2. Tester cette fonction sur une matrice de votre choix, et comparer le résultat à celui de la fonction Matlab prédéfinie « det » pour vérifier que votre résultat est juste.

Rappel de cours : le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n peut être calculé avec la formule suivante (en choisissant une ligne i) :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} * a_{i,j} * \det(A_{i,j})$$

Avec, $a_{i,j}$ est l'élément à la ligne i et la colonne j de la matrice A, et $A_{i,j}$ est la matrice A sans la ligne i et la colonne j.

Pour une matrice carrée A d'ordre 2 nous avons :

$$\det(A) = a_{1,1} * a_{2,2} - a_{2,1} * a_{1,2}$$

Exercice 02 : Elimination de Gauss

1. Ecrire une fonction « elimination_gauss » qui prend comme argument une matrice de coefficients quelconque A et un vecteur de second membre b, et qui applique l'élimination de Gauss pour retourner une matrice triangulaire supérieure A_2 et un vecteur colonne b_2 tel que :
    a. Le système $A_2x = b_2$ est équivalent au système du départ $Ax = b$ (les deux systèmes ont la même solution).
    b. La matrice de coefficients retournée A_2 doit être triangulaire supérieure.
2. Tester la fonction d'élimination de gauss sur un système linéaire aléatoire de taille 100.
    a. Utiliser la fonction « type_matrice » pour vérifier que la matrice A_2 du résultat est triangulaire supérieure.
    b. Qu'observez-vous ? expliquer.
3. Utiliser votre fonction pour transformer un système linéaire aléatoire de taille 100 en un système triangulaire équivalent, puis résoudre le système obtenu avec la fonction « resoudre_triangulaire_superieur » que vous avez implémentée dans la deuxième feuille de TP.
    a. Vérifier que $b - Ax = 0$ (vecteur nul) pour confirmer que votre solution est juste.
    b. Qu'observez-vous ? expliquer.
    c. Comparer vos résultats à ceux obtenus par le solveur prédéfini de Matlab ($x = A\backslash b$) pour confirmer d'une autre façon que votre algorithme est juste.

Exercice 03 : Factorisation LU

1. Ecrire une fonction Matlab « factorisation_lu » qui prend comme argument une matrice quelconque A et qui retourne comme résultat une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U tel que : $A = LU$.
2. Ecrire une fonction « resoudre_lu » qui résout un système linéaire en utilisant la factorisation LU de la matrice de coefficients A. Puis tester cette fonction et comparer ces résultats à ceux obtenus avec le solveur prédéfini dans Matlab pour vérifier que votre fonction est juste.
3. Ecrire une fonction « determinant_lu » qui prend comme argument une matrice quelconque A et qui calcule son déterminant à l'aide de la factorisation LU.
   - Le calcul est basé sur la propriété « *det(A) = det(LU) = det(L) * det(U)* ».
   - Utiliser la fonction « determinant_triangulaire » de la feuille de TP 02 pour calculer les déterminants des matrices L et U.
4. Comparer les résultats et le temps d'exécution de la fonction « determinant_lu » à ceux de la fonction « determinant » (de l'exercice 01 de cette feuille de TP) en effectuant le calcul sur une matrice aléatoire carrée d'ordre 10.
   - Qu'observez-vous ? Expliquer.

Exercice 04 : Elimination de Gauss avec Pivot Partiel

1. Ecrire une fonction « gauss_pivot_partiel » qui prend comme argument une matrice de coefficients quelconque A et un vecteur de second membre b, et qui applique l'élimination de Gauss avec pivot partiel pour éviter les pivots nuls sur des matrices ayant un déterminant non nul.
   a. Le pivot doit être déterminé en choisissant la valeur la plus large en valeur absolue en dessous de la diagonale sur la même colonne.
   b. La fonction doit dire si la matrice de coefficients n'est pas inversible.
2. Soit le système linéaire déterminé par la matrice de coefficients et le vecteur de second membre suivants :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 9 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & -6 & 1 & 3 \\ -6 & 5 & -7 & -5 & 7 \\ 0 & -4 & 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 36 \\ 5 \\ 33 \\ -53 \\ -55 \end{pmatrix}.$$

   a. Essayer de résoudre ce système en utilisant la méthode de gauss sans échange (de l'exercice 02) puis en utilisant l'élimination de Gauss avec pivot partiel.
   b. Qu'observez-vous ? expliquer.
3. Initialiser un système linéaire aléatoire de taille 15, puis résoudre ce même système dans un premier temps en utilisant la méthode de Gauss sans échange (garder la solution dans une variable x_1), puis avec pivot partiel (garder cette solution dans une variable x_2).
   a. Comparer les deux solutions et dire laquelle est la plus précise.
   b. ***Indication :*** une solution est plus précise qu'une autre si elle assure un résidu (b - Ax) inférieur.