Université 8 Mai 1945-Guelma **Année universitaire 2023-2024**
Facultés de MISM **Département d'informatique**
Niveau: 2 -ème année ingénieur en informatique

Série de TD N^o: 2

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, avec Ω fini, On considère l'application $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$.

a) Si $n = 2$, $\mathcal{F} = \{\phi, \Omega\}$, $X(\omega_1) = x_1$ et $X(\omega_2) = x_2$ o $x_1 \neq x_2$.

♠X est-elle une variable aleatoire.

b) Si $n = 5$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω, $X(\omega_1) = 0$ et $X(\omega_2) = X(\omega_3) = 1$ où $X(\omega_4) = X(\omega_5) = 2$.

1) Verifier que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

2) Déterminer la fonction de masse et la fonction de repartition de cette variable en supposant que les $\{\omega_i; i = 1, \ldots, n\}$ sont equiprobables.

3) Déduire les probabilites $P(-1 < X \leq 2)$ et $P(X \geq 2)$.

Exercice 2

La fonction de masse d'une variable aléatoire X est

$$f(x) = \begin{cases} 2P \text{ si } x = 1 \\ P \text{ si } x = 2 \\ 4P \text{ si } x = 3 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur de P.

2) Calculer $P(0 \leq X \leq 3)$ et $P(X > 1,6)$.

Exercice 3

On choisit au hasard une boule d'une urne contenant **8 boules** numerotées: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Soit X la variable aléatoire representant le numero de la boule choisie.

1) Déterminer la loi de probabilite, la fonction de repartition, la moyenne de cette variable.

2) Reprendre la question 1, pour les variables aleatoires $|X|$ et X^2.

Exercice 4

Un joueur lance un de equilibre et gagne **1 DA** si le resultat est **pair**, il perd **1 DA** si le resultat est **1** ou **3** et ne perd ou ne gagne rien si le resultat est **5**.

On note X la variable aléatoire egale au gain du joueur.

1) Déterminer la loi de X.

2) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

3) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X^2$ et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 5

On place une souris dans une cage. Elle se trouve face à **4** portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, la souris reçoit une décharge électrique et on la replace à l'endroit initial. On suppose que la souris mémorise les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'elle n'a pas encore essayé. Soit X la v.a. représentant le nombre d'essais pour sortir de la cage.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X. Reconnaître la loi.

2. Calculer $\mathbb{E}(\mathbb{X})$ et $Var(X)$.

Exercice 6

Une urne contient **7** boules: **une boule rouge**, **2 boules jaunes** et **4 boules vertes**. Un joueur tire au hasard une boule, si la boule est **rouge**, il gagne **10 points**, si elle est jaune, il perd **5 points**, si elle est **verte**, il tire sans remise une **deuxième boule** de l'urne, si cette deuxième boule est **rouge**, il gagne **8 points**, sinon il perd **4 points**. Soit X la v.a. associant à chaque tirage le gain du joueur.

1) Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X.

2) Calculer l'espérance et la variance de la v.a. X.

3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est **rouge**, pour que l'espérance de la v.a. X soit nulle.

Exercice 7

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $\mathbf{0,1}$. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la v.a. qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?

2. Quelle est la probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut ?

3. Quelle est la probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut ?

4. Quelle est la probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut ?