OUTILS MATHEMATIQUES

I. EQUATION AUX DIMENSIONS

1. La notion de grandeur

Grandeurs physiques : on appelle grandeur physique toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou par le calcul, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre accompagné d'une unité de mesure.

Exemples : un temps, une longueur, une masse...etc.

- **Les grandeurs mesurables** : les grandeurs mesurable peuvent être superposables directement ou indirectement et sont comparables entre elles.

Exemples : la longueur

- **Les grandeurs repérables** : les grandeurs repérables nécessitent l'élaboration d'échelles définies par convention, dites échelles de repérage (par exemple l'échelle de Richter pour les séismes).

Exemple : la température

- **Les grandeurs composées** : il s'agit de grandeurs composées de 2 autres grandeurs; c'est le cas, par exemple, de la vitesse moyenne qui s'exprime en km/h

2. Dimension d'une grandeur

La dimension d'une grandeur correspond à sa nature physique, par exemple une longueur, un temps, une tension. C'st l'approche qualitative, qui répond à la question : « qu'est ce que c'est ? »

Cela n'indique pas avec quelle unité celle-ci sera mesurée. Une grandeur dont la dimension est homogène à une longueur peut s'exprimer en mètre, en miles en années-lumière, …etc.

Remarque : si on demande « quelle est la dimension de L ? » il faut répondre « L a la dimension d'une longueur ».

3. les sept grandeurs de base du système international (S.I.)

Grandeur physique	Lettre utilisée	Unité de mesure (S.I.)	Symbole de l'unité
Masse	M	Kilogramme	Kg
longueur	L	Mètre	M
Temps	T	Seconde	S
Intensité électrique	I	Ampère	A
Température	θ	Kelvin	K
Intensité lumineuse	J	Candela	Cd
Quantité de matière	N	Mole	mol

4. Écriture d'une équation aux dimensions

Pour toute grandeur G étant donné la cohérence la cohérence universelle entre les grandeurs physique et l'existence seulement sept grandeurs fondamentales, on peut toujours écrire :

$$\boldsymbol{dimG} = [G] = L^a M^b T^c I^d \theta^e N^f J^g$$

Exemple : si G est une longueur on écrira : $[G] = L$. Pour la vitesse, V, on écrira $[G] = LT^{-1}$

4.1 Propriétés des équations aux dimensions

A, B et C étant des grandeurs physiques,

* C=A+B ==> $[A] = [B] = [C]$.

* $B = \frac{1}{A}$ ==> $[B] = [A]^{-1}$

* C= A. B ==> $[\mathrm{C}] = [\mathrm{A}].[\mathrm{B}]$

* $C = \frac{dA}{dB}$ ==> $[\mathrm{C}] = [\mathrm{A}].[\mathrm{B}]^{-1}$

*l'argument d'une fonction transcendante (sin, cos, tan, exp, ln, ch, sh, th,…etc.) doit être sans dimension.

* on ne peut additionner que des termes ayant la même dimension.

4.2 Utilisation de l'équation aux dimensions

A) *Permet de vérifier homogénéité d'une expression* : une équation est homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension

Remarque :

Une équation non homogène est obligatoirement fausse.

Une équation homogène peut cependant être fausse.

B) *Une manière de déterminer l'unité physique à attribuer au résultat d'une mesure ou un calcul*

C) *On peut exprimer n'importe quelle unité en fonction d'une ou plusieurs des sept unités du système international*

Exemple : l'énergie cinétique s'écrit $\mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2$

L'équation aux dimensions $[\mathrm{E_c}] = \left[\frac{1}{2}\mathrm{mv}^2\right] = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$ avec l'unité $\mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$

Comme l'énergie s'exprime en joules (J). Par conséquent $1\mathrm{j} = \mathrm{kgm^2s^{-2}}$.

4.3 Relation entre les unités

Les relations entre les unités des différents systèmes peuvent être facilement établies en utilisant les équations aux dimensions :

$$\frac{\acute{G}}{G} = \left(\frac{\acute{M}}{M}\right)^{a}\left(\frac{\acute{L}}{L}\right)^{b}\left(\frac{\acute{T}}{T}\right)^{c} \ldots.$$

Exemple : calculer la relation existant entre le Barye (unité de pression dans le système CGS) et le pascal (unité de pression dans le S.I.).

On a la pression donné par, $P = \frac{F}{S}$, et $[P] = [F].[S]^{-1} = MT^{2}L^{-1}$

En S.I. $[\acute{P}] = \acute{M}\acute{T}^{2}\acute{L}^{-1}$

En CGS $[P] = MT^{2}L^{-1}$

Alors $\frac{[\acute{P}]}{[P]} = \left(\frac{\acute{M}}{M}\right)\left(\frac{\acute{L}}{L}\right)^{2}\left(\frac{\acute{T}}{T}\right)^{-1} = \left(\frac{\acute{M}}{M}\right)\left(\frac{\acute{T}}{T}\right)^{2}\left(\frac{L}{\acute{L}}\right)$

Doc le rapport des unités est donné par $\frac{1\ Pa}{1\ Barye} = \left(\frac{kg}{g}\right)\left(\frac{cm}{m}\right)^{2}$

A.N. $\frac{1\ Pa}{1\ Barye} = \left(\frac{100g}{1g}\right)\left(\frac{1cm}{100cm}\right) = 10$ ==>1Pa=10 Barye

II. LES VECTEURS

Définitions

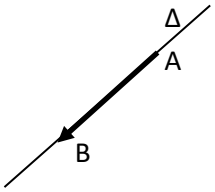
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ (A est l'origine et B est l'extrême) est un objet mathématique qui permet de représenter des grandeurs physiques qui sont définies par :

*une direction (la droit Δ)

*un sens (du point A vers B)

*Une norme ou longueur (la distance AB)

Ex vitesse, accélération, force …etc

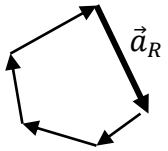


1. propriétés des vecteurs

Egalité des vecteurs : nous disons deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ équivalents s'ils ont la même direction, le même sens et la même intensité

-somme des vecteurs : la somme d'un certains nombre de vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{a}_n$est un vecteur $\vec{a}_R$

-produit d'un vecteur par un scalaire



$\lambda(\vec{a}) = (\lambda\vec{a}) = \vec{a}\lambda$

$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$

$\lambda\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \ \lambda = 0 \ ou \ \vec{a} = \vec{0}$

$(\lambda + \mu)\vec{a} = \vec{a}(\lambda + \mu) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

Remarque

-La somme de deux vecteurs opposés est nulle : $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

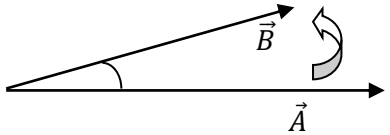
-tout vecteur ayant son extrémité confondue avec son origine est appelé vecteur nul $\vec{0}$

-Vecteurs colinéaires : soit $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs non nuls a et b sont colinéaires si les deux vecteurs ont la même direction $\vec{A} = k\vec{B}$

-Vecteurs coplanaire : soit $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ trois vecteurs de l'espace tel que $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne soient pas colinéaires. Alors les trois vecteurs sont coplanaire si $\vec{C}$=$\lambda\vec{A} + \mu\vec{B}$.

2. PRODUIT SCALAIRE

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, faisant entre eux l'angle θ , la quantité scalaire *m* tel que $m = \vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.cos\ \theta$



2.1 Expression analytique du produit scalaire

Si *(x ; y ; z)* et *(x' ; y'; z')* sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans la base ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) alors :

$\vec{A}.\vec{B}=(x.\vec{\imath}+y.\vec{j}+z.k)\left(x'\vec{\imath}+y'.\vec{j}+z'.\vec{k}\right)=xx'\vec{\imath}.\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}.\vec{j}+xz'\vec{\imath}.\vec{k}+yx'\vec{j}.\vec{\imath}+yy'\vec{j}.\vec{j}+yz'\vec{j}.\vec{k}+zx'\vec{k}.\vec{\imath}+zy'\vec{k}.\vec{j}+zz'\vec{k}.\vec{k}$

Dans un repère orthonormé, on peut écrire:

$\vec{\imath}.\vec{\imath}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1$ et $\vec{\imath}.\vec{j}=\vec{\imath}.\vec{k}=\vec{j}.\vec{\imath}=\vec{j}.\vec{\imath}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{\imath}$

Donc $\vec{A}.\vec{B}$ = x x' + y y' + zz'

Remarque

- On dit que deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{A}.\vec{B}=\vec{0}$

- Le produit scalaire est une grandeur positive, négative ou nulle selon la valeur de l'angle θ.

2.2 Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ et tout réel λ on a :

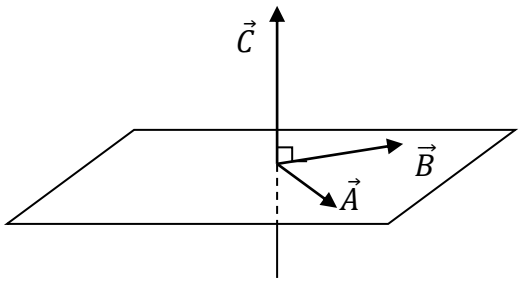
$\vec{A}.\vec{B}=\overrightarrow{B}.\vec{A}$ $\qquad\qquad$ $\vec{A}.\vec{A}=A^2$

$(\lambda\vec{A}).\vec{B}=\vec{A}(\lambda\vec{B})=\lambda(\overrightarrow{A}.\vec{B})$ $\qquad$ $(\vec{A}+\vec{B}).\vec{C}=\vec{A}\vec{C}+\vec{B}\vec{C}$

3. PRODUIT VECTORIEL

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ le vecteur noté $\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}$

dont la direction est perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$, le sens est donné par la règle du tirebouchon



Défini de la manière suivante :

-la direction de $\vec{C}$ est définie par $\vec{C}\perp\vec{A}$ et $\vec{C}\perp\vec{B}$.

-le sens de $\vec{C}$ est tel que le triplet ($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$) est direct, c'est-à-dire obéit à la règle de la main droite.

-la norme de $\vec{C}$ est égale à l'aire du parallélogramme sous tendu par ($\vec{A}$, $\vec{B}$), c'est-à-dire

$\|\vec{C}\|=\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|.|sin(\vec{A},\vec{B})|$

Remarque :

$\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires si et seulement si

$\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$

3.1 Expression analytique de produit vectoriel

Dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$de référence, on écrit les coordonnées des vecteurs $\vec{\mathrm{A}}$ et $\vec{\mathrm{B}}$:

$$\vec{\mathrm{A}}\begin{pmatrix}\mathrm{x_A}\\ \mathrm{y_A}\\ \mathrm{z_A}\end{pmatrix} \text{ et } \vec{\mathrm{B}}\begin{pmatrix}\mathrm{x_B}\\ \mathrm{y_B}\\ \mathrm{z_B}\end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{B} = \left(\mathrm{x_A}\vec{\imath} + \mathrm{y_A}\vec{\jmath} + \mathrm{z_A}\vec{\mathrm{k}}\right) \wedge \left(\mathrm{x_B}\vec{\imath} + \mathrm{y_B}\vec{\jmath} + \mathrm{z_B}\vec{\mathrm{k}}\right)$$

$$= (y_A\mathrm{z_B} - z_A\mathrm{y_B})\vec{\imath} + (z_A\mathrm{x_B} - x_A\mathrm{z_B})\vec{\jmath} + (x_A\mathrm{y_B} - y_A\mathrm{x_B})\vec{\mathrm{k}}$$

Dans la pratique $\vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{B}$ s'obtient en développant le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix}$$

3.2 Propriétés de produit vectoriel

On a les propriétés suivantes, pour tous vecteurs $\vec{\mathrm{A}}, \vec{B}$ et $\vec{\mathrm{C}}$

* $\vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{B} = \vec{0} <==> \vec{A} = \vec{0}, \vec{B} = \vec{0}$ ou $\vec{\mathrm{A}}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires

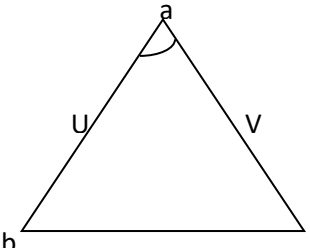
* $\vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{B} = -\vec{\mathrm{B}} \wedge \vec{A}$

*si λ et μ des nombres réels $\lambda\vec{\mathrm{A}} \wedge \mu\vec{B} = \mu\vec{\mathrm{A}} \wedge \lambda\vec{B} = \lambda\mu\vec{A} \wedge \vec{B}$

*$\vec{\mathrm{A}} \wedge \left(\vec{B} + \vec{\mathrm{C}}\right) = \vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{B} + \vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{\mathrm{C}}$

*$\vec{\mathrm{A}} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{\mathrm{C}}\right) = \left(\vec{\mathrm{A}}.\vec{\mathrm{C}}\right).\vec{B} - \left(\vec{\mathrm{A}}.\vec{B}\right).\vec{\mathrm{C}}$

3.3 Applications du produit vectoriel



L'aire d'un triangle abc est donnée par $S = \frac{1}{2}U.V.sin(\widehat{abc})$

Ce qui s'écrit encore $S = \frac{1}{2}\|ab\|.\|ac\|.\left|sin(\widehat{abc})\right|$

On déduit $S = \frac{1}{2}\left\|\vec{U} \wedge \vec{V}\right\|$.

III. ERREURS ET INCERTITUDES DE MESURE

En sciences expérimentales, il n'existe pas de mesures exactes. Les mesures sont entachées d'erreurs plus ou moins importantes en fonction de la qualité des instruments, de l'habileté du manipulateur . . .
La mesure ne pouvant être absolument précise, il existe inexorablement un écart entre la valeur obtenue et la valeur exacte (appelée valeur vraie). Cet écart est appelé erreur de mesure. Lors d'une mesure, le scientifique cherche à réduire l'erreur donc il doit être capable de l'identifier et de l'estimer.

1- L'erreur

L'erreur est la différence entre la valeur mesurée X_m et la valeur vraie X_v (la valeur vraie est en général inconnue).

On distingue deux types d'erreurs dont toute mesure peut être affectée :

L'erreur de mesure aléatoire : telles que les erreurs de l'operateur comme lecture ou dues aux conditions extérieurs (température, humidité …etc.).

Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois, dans les mêmes conditions, le mesurage d'une même grandeur, les valeurs mesurées peuvent être différentes. On parle alors d'erreur de mesure aléatoire.
L'incertitude associée est une incertitude de répétabilité dite de type A

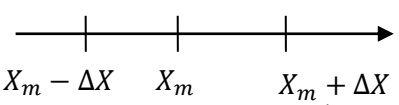
L'erreur de mesure systématique : (précision, résolution) liées à l'instrument. Lors d'une mesure unique, la précision de l'appareil de mesure (ex : la qualité des composants), la façon dont il est utilisé (ex : la méthode utilisée) et la qualité du mesurage (ex : le réglage du zéro de l'appareil) sont à prendre en compte: l'erreur correspondante est l'erreur systématique et l'incertitude associé est dite de type B.

2. L'incertitude

L'incertitude : paramètre définit un intervalle autour la valeur mesurée qui inclut la valeur vraie avec une probabilité plus ou moins grande.

2.1 L'incertitude absolue : la limite supérieur de l'erreur ΔX tel que :

$$X_m - \Delta X < X_v < X_m + \Delta X$$



2.2 L'incertitude relative : le rapport de l'incertitude absolue à la valeur mesurée

$$\frac{\Delta X}{X_m} = \frac{incertitude\ absolue}{valeur\ mesurée}$$

Remarque

Le résultat de mesure s'écrit: $X = X_m \pm \Delta X$

Pour les incertitudes de type B, on considère que l'incertitude de mesure à prendre en compte est l'incertitude élargie ΔX= 2Δx, pour un niveau de confiance élevé

3. calcul d'incertitude

3.1 Incertitude de type A

Une incertitude de type A est évaluée par des méthodes statistiques qui mettent en jeu la moyenne et l'écart-type. Elle est issue de l'exploitation d'un nombre important de valeurs mesurées.

Méthode statistique : souvent, on adopte pour valeur approchée la moyenne arithmétique de différentes mesures, x_i.

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots\ldots x_n}{n}$ où n est le nombre des mesures réalisées

Son écart-type, noté $\sigma_{\bar{x}}$ et aussi appelé écart-type de la moyenne, est donné par :

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}{(n-1)}}$$

Le résultat de la mesure est finalement donne sous la forme $X = \bar{X} \pm \sigma(\bar{x})$.

3.2 Incertitude de type B

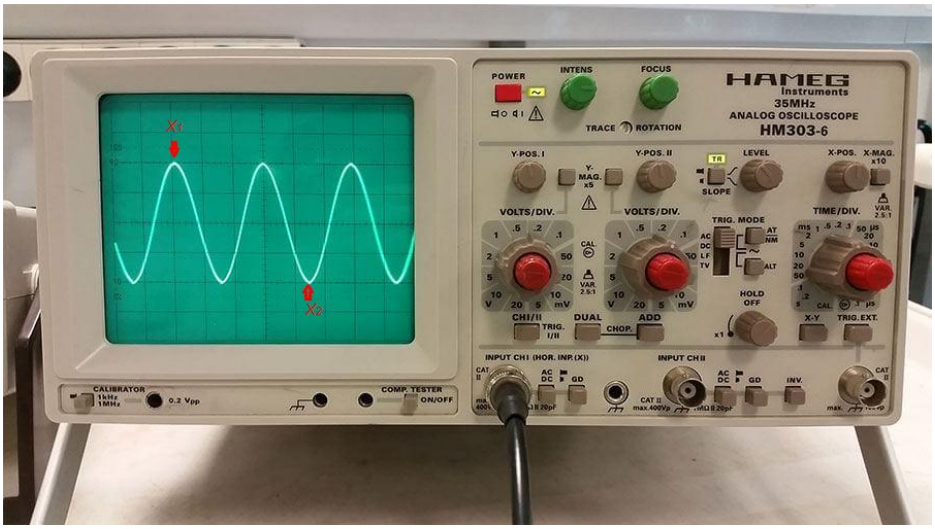
L'évaluation de celle-ci nécessite de rechercher toutes les sources d'erreur et d'évaluer l'incertitude associée à chaque source.

Lecture sur une échelle graduée:

$$\Delta X_{lecture} = \frac{2\ graduations}{\sqrt{12}}$$

Double lecture

$$\Delta X_{doublelecture} = \sqrt{2}\Delta X_{lecture} = \sqrt{2}\frac{2\ graduations}{\sqrt{12}}$$



Utilisation d'un appareil de tolérance donnée

$$\Delta X_{tolerance} = \frac{2\ t}{\sqrt{3}}$$

3.4 L'incertitude d'une fonction à plusieurs variables : supposons que g une fonction dépende de plusieurs grandeurs x, y, et z mesurées avec les incertitudes Δx ; Δy et Δz. l'erreur maximum possible sur $g = f(x, y, z)$.

$$\Delta g = \left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right|$$

Remarque

Les dérivées partielles $\left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial \$}\right|$sont les dérivées de la fonction f par rapport à une variable, les autres variables étant considérées comme constantes.

Lorsque g contient des produits, rapports ou puissances, on a intérêt à utiliser la différentielle logarithmique pour exprimer directement l'incertitude relative sur g en fonction des incertitudes sur x, y et z. Par exemple, on considère la fonction suivante

$$f(x, y, z) = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$$

On prend le logarithme népérien de la valeur absolue des deux membres.

$$ln(g) = ln[f(x, y, z)] = ln(x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma})$$

Puis on calcule la différentielle.

$$\frac{df}{f} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$$

D'où, en remplaçant les différentielles par des incertitudes et le signe – par un + entre les termes

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

3.5 Formules usuelles d'incertitude

-Addition et soustraction : supposons que la grandeur cherchée C soit la somme (la différence) de 2 mesures A et B: C=A±B

Dans ce cas l'incertitude sur le résultat est : ΔC=ΔA+ΔB

-Multiplication et division: supposons maintenant que la grandeur cherchée C soit le résultat de calcul suivant: C=A.B ou bien C=A/B

Dans ces cas l'incertitude relative sur le résultat est : $\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$

Exemple:

On cherche a calculé l'énergie cinétique d'un corps de masse m= 9.5±0.2kg et de vitesse v=7.35±0.01m/s.

On prend l'expression mathématique de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

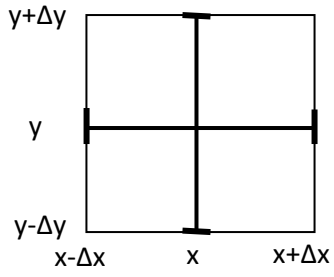
puis on calcule la différentielle : $\Delta E_c = \left|\frac{\partial E_c}{\partial m}\right| \Delta m + \left|\frac{\partial E_c}{\partial v}\right| \Delta v = \frac{v^2}{2}\Delta m + mv\Delta v$

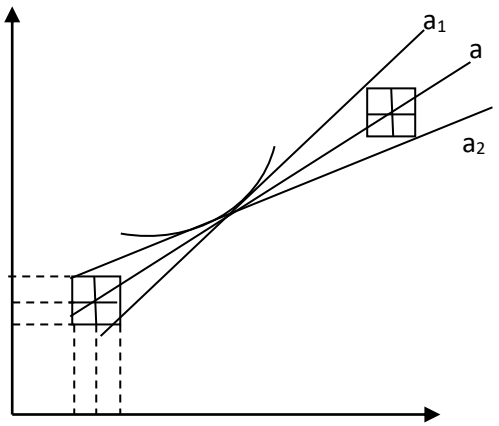
On en déduit : $\frac{\Delta E_c}{E_c} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta v}{v} = \frac{0.2}{9.5} + 2\frac{0.01}{7.35} = 0{,}024$

La valeur approchée de l'énergie cinétique est $E_{c\ appr}$=256,6

Donc la valeur de l'énergie cinétique avec précision est : $E_c = E_{c\ appr} \pm \Delta E_c$=256,6±6.2 J

3.6 Représentation graphique d'incertitude





Sur un graphe on représente l'incertitude absolue par une barre d'incertitude comme le montre la figure.

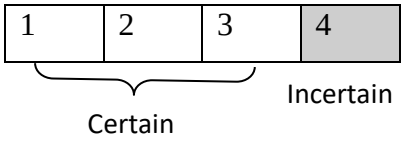
Pour une variation linéaire, la pente ‘’a’’ est déterminée par la moyenne des pentes extrêmes a_1 et a_2 :

$\boldsymbol{a = \frac{a_1 + a_2}{2}}$

L’incertitude est $\Delta a = \left|\frac{a_1 - a_2}{2}\right|$

4 chiffres significatifs

Les chiffres significatifs d’une mesure sont les chiffres certains et le premier chiffre incertain



Exemple :

3 --------> un chiffre significatif; c’est un chiffre incertain.

35 --------> deux chiffres significatifs, un certain + un incertain.

356 --------> trois chiffres significatifs, deux certain + un incertain.

- Les zéro à l’extrême gauche d’un nombre ne sont pas significatifs (seulement pour donner un ordre de grandeur).

Exemple :

0.123 trois chiffres significatifs.

1.012 quatre chiffres significatifs.

1230 quatre chiffres significatifs.

Remarque : comme si l'incertitude est inconnue, tous les chiffres fournis par la mesure doivent être conservés

4.1 Calcul et chiffre significatifs : le nombre des chiffres significatifs des résultats équivalant a celui du terme qui en comporte le moins.

Exemple

12.3+15.02-5.007=22.2

$\frac{123.45x1.54}{10.55} = 18.0$

5. Arrondis

Quand on réalise un calcul on obtient un nombre avec beaucoup de chiffres et il convient de l’arrondir avec le bon nombre de chiffres significatifs

Exemple

On veut arrondir le nombre 19.1X à trois chiffres significatifs

Si x=1,2,3 ou 4 ---------> le nombre est arrondi à 19.1.

Si x=6,7,8 ou 9 ---------> le nombre est arrondi à 19.2

Remarque

si le dernier chiffre est 5 : (ex :19.X5)

pour X impair le nombre est arrondi en augmentant X

pour X pair le nombre est arrondi à 19.X

pour X pair et qu'il y a des chiffres après le 5, le nombre arrondi en augmentant le X

Bibliographie

1/ Vocabulaire international de métrologie –Concepts fondamentaux et généraux et termes associés, JCGM 200:2012.

2/ John R. Taylor**, Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques, avec exercices et problèmes résolus**, (2000) Dunod, Masson Sciences

3/ A. KADI **MECANIQUE RATIONNELLE Cours & exercices résolus** Universite M'hamed BOUGARA - Boumerdes

4/ D. M. Brunel, N. Burle, L. C. Kovacic, O. Chevalier, K. Coulié, G. Micolau, **Physique L1: Cours complet avec exercices corrigés et vidéos** (2015) Patris Montreuil-sous-Bois; Pearson France.

5/ D. C. Joffin, F. Lafont, E. Mathieu **Je pratique la métrologie - Caractéristiques des instruments et méthodes de mesure** (2018) Lexitis Editions France