Lois usuelles

1. Loi de Bernoulli de paramètre p, $B(p)$

C'est la loi d'une variable aléatoire X qui ne peut prendre que **2 valeurs**, notées 1 et 0, et $p \in [0;1]$ est la probabilité de la valeur 1 :

$$P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p$$

C'est donc la loi de la fonction indicatrice 1_A d'un événement A tel que $P(A) = p$. On a

$$\mathbb{E}[X] = p \text{ et } Var(X) = p(1-p)$$

2. Loi binomiale de paramètres n et $p, B(n;p)$

Soit n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, indépendantes et de même loi $B(p)$. La loi binomiale $B(n,p)$ est la loi de la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + +X_n$.

C'est donc la loi du nombre d'événements parmi $A_1, \ldots, A_n$ qui sont réalisés, si $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants et de même probabilité p. (Ci-dessus, $X_n = 1_{A_n}$) S_n est à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$et on a:

$$\text{pour } k = 0, 1, \ldots, n;\ P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

De plus

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = np$$

et comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = np(1-p)$$

3. Loi de Poisson de paramètre λ, $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit $\lambda \succ 0$. Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}; P(X = k) = \exp(-k)\frac{\lambda^k}{k!}$$

On a

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \text{ et } Var(X) = \lambda$$

C'est la « loi des petites probabilités » car **la loi limite** de la loi binomiale $B(n;p)$, avec $np \sim \lambda$.

4. Champs d'appliocations : La loi de Poisson modélise des phénomènes rares, elle peut être aussi utilisée pour approximer la loi binomiale comme nous allons le voir dans la suite.

Exemple 1

On suppose que sur 1000 personnes voyageant par train à un instant donné, il y a en moyenne 1 médecin. Soit X la v.a. représentant le nombre de médecins dans le train.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?

2. Quelle est la probabilité de trouver:

(a) Aucun médecin.

(b) Entre 2 et 4 médecins (au sens large).

(c) Au moins deux médecins.

Réponse

1. La loi de probabilité de la v.a. X :

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, on écrit $X \to \mathcal{P}(1)$, et on a :
$P(X = k) = \exp(-k)\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(-1)\frac{1}{k!}$

2. La probabilité de trouver:

(a) Aucun médecin est :

$$P(X = 0) = e^{-1}\frac{1}{0!} = e^{-1} = 0,368.$$

(b) Entre 2 et 4 médecins (au sens large) est:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 4) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= e^{-1}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 0,261. \end{aligned}$$

(c) Au moins deux médecins est:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left(0,368 + e^{-1}\frac{1}{1!}\right) \\ &= 0,262. \end{aligned}$$

Proposition 1

Si $X \to \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \to \mathcal{P}(\lambda_2)$, les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, alors $X + Y \to \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

5. Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

La loi binomiale dépend de deux paramètres n et p, alors que la loi de Poisson ne dépend que d'un seul paramètre. Pour qu'une loi binomiale soit au plus proche d'une loi de Poisson, on doit au moins souhaiter que ces deux lois aient la même espérance. L'espérance de la loi binomiale étant np et celle de la loi de Poisson étant λ, il faut que $\lambda = np$. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante pour réaliser une telle approximation, théoriquement l'approximation est parfaite lorsque:

$$\begin{cases} n \to +\infty \\ p \to 0 \\ np = \text{constante} \end{cases}$$

En pratique, la condition:

$$\begin{cases} n > 30 \\ np < 5. \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} n > 50 \\ p < 0,1. \end{cases}$$

est suffisante pour envisager l'approximation.

Exemple 2

On considère une loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,1$. On est dans les conditions d'approximation de cette loi par une loi de Poisson de paramètre

$\lambda = 0,1 \times 35 = 3,5$.

6. Loi géométrique

On dit qu'une v.a. X suit une loi géométrique de paramètre p si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } k \in X(\Omega), P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On note :

$$X \to \mathcal{G}(p).$$

Elle admet pour moments:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Situation d'application: La loi géometrique modélise le rang du premier succès en répétant une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante à l'infini (théoriquement).

7. Fonction génératrice des moments d'une $V.a.$ discrète

La fonction génératrice des moments d'une $V.a.$ discrète X est donné par:

$$G_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{tk} P(X = k).$$

Exemple 3

La fonction génératrice des moments d'une $V.a.$ $X \to B(p)$:

$$\begin{aligned} G_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) &= \sum_{k \in X(\Omega)} e^{tk} P(X = k). \\ &= e^{t\times 0}(1-p) + e^{t\times 1}p \\ &= (1-p) + pe^t. \end{aligned}$$

La fonction génératrice des moments d'une $V.a.$ $Y \to \mathcal{G}(p)$:

$$\begin{aligned} G_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) &= \sum_{k \in X(\Omega)} e^{tk} P(Y = k). \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} p(1-p)^{k-1} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)e^t)^k \\ &= \frac{p}{(1-p)} \frac{1}{(1-(1-p)e^t)}. \end{aligned}$$

Exemple 4

Un certain matériel a une probabilité $p = 0{,}02$ de défaillance à chaque mise en service. On procède à l'expérience suivante, l'appareil est mis en marche, arrêté, remis en marche, arrêté, jusqu'à ce qu'il tombe en panne. Soit X la v.a. représentant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la panne.

1. Quelle est la loi de probabilité de la $V.a.$ X ?

2. Quelle est la probabilité que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au dixième essai ?

Réponse

1. La loi de probabilité de la v.a. X :

La v.a. X suit une loi géométrique de paramètre $p = 0{,}02$, on écrit $X \to \mathcal{G}(0{,}02)$, et on a:

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = (0{,}02)(0{,}98)^{k-1}.$$

2. La probabilité que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au dixième essai :

$$P(X = 10) = (0,02)(0,98)^{10-1} = 0,016.$$

8. Loi Hypergéométrique

On dit qu'une variable aléatoire X définie sur un espace de probabilité (Ω, F, P) suit une loi Hypergéométrique de paramètres N, N_1, n et on note $X \to H(N, N_1, n)$

si $D_X = \{0, 1, \ldots, min(N_1; n)\}$ et sa fonction de masse pX est donnée par

$$P_X(k) = \begin{cases} \dfrac{C_{N_1}^k \times C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} \text{ si } k \in D_X \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple 5

Considérons une urne contenant N boules dont N_1 boules blanches et $N - N_1$ boules noires. On tire en une seule fois n boules et on note par X : " Le nombre de boules blanches parmis les n tirées".

En utilisant la théorie classique des probabilités, il est facile de remarquer que

$$p(X = k) = \frac{C_{N_1}^k \times C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} \text{ pour tout } k \in \{0, 1, \ldots, min(N_1, n)\}$$

donc il s'agie d'une variable aléatoire qui suit une loi hypergéométrique de paramètres N, N_1, n, c'est-à-dire $X \to H(N, N_1, n)$.

Remarque

Si $X \to H(N, N_1, n)$, alors on a

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } var(X) = np(1 - p)\frac{N - n}{N - 1}$$

où $p = \dfrac{N_1}{N}$