Corrige de TD 2

Exercice 1

a) X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{F}$. Supposons $x_1 < x_2$: si $x \in [x_1, x_2[$,

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} = \{\omega_1\} \notin \mathcal{F},$$

donc X n'est pas une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

b) 1. Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{P}(\Omega)$, ainsi X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

2. Le support de la variable aléatoire X est $D_X = \{0, 1, 2\}$, et sa fonction de masse P_X est définie par:

$$\begin{cases} P_X(0) = P(X=0) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{5} \\ P_X(1) = P(X=1) = P(\{\omega_2, \omega_3\}) = \frac{2}{5} \\ P_X(2) = P(X=2) = P(\{\omega_4, \omega_5\}) = \frac{2}{5} \end{cases}$$

la fonction de répartition F_X de X est définie par:

$$\begin{cases} \text{si } x < 0; F_X(x) = 0 \\ \text{si } 0 \leq x < 1; F_X(x) = P_X(0) = \frac{1}{5} \\ \text{si } 1 \leq x < 2 \text{ ; } F_X(x) = P_X(0) + P_X(1) = \frac{3}{5} \\ \text{si } x \geq 2 \text{ ; } F_X(x) = P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) = 1. \end{cases}$$

d'où

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{5} \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{5} \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ 1 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

Caculons

$P(-1 < X \leq 2) = F_X(2) - F_X(-1) = 1 - 0 = 1$ et $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F_X(1) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$

Exercice 2

1. f est une fonction de masse de la v.a.r X, alors son support est $D_X = \{1, 2, 3\}$.

$$\begin{cases} f \text{ est une fonction de masse de la } v.a.r\ X \Leftrightarrow \sum_{x=1}^{3} f(x) = 1. \\ \sum_{x=1}^{3} f(x) = 1 \Leftrightarrow 2p + p + 4p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Il est facile de déduire que la fonction de répartition de la $v.a\ X$ est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{2}{7} \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{7} \text{ si } 2 \leq x < 3 \\ 1 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

donc en utilisant les proprietés de la fonction de répartition on obtient donc

$$\begin{cases} P(0 \leq X < 3) = F_X(3) - F_X(-0) + p_X(0) = 1 - 0 + 0 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \\ \text{et} \\ P(X > 1,6) = 1 - F_X(1,6) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}. \end{cases}$$

Exercice 3

1. Le support de X est $D(X) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ et sa fonction de masse P_X est définie par:

$$P(X = -3) = P(X = -2) = P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = \frac{1}{8},$$

c'est-à-dire X suit loi uniforme sur l'ensemble $\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ $(X \to U_{\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}})$. Il est facile de déduire que la fonction de répartition de la $V.a.r\ X$ est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -3 \\ \frac{2}{7} \text{ si } -3 \leq x < -2 \\ \frac{3}{7} \text{ si } -2 \leq x < -1 \\ . \\ . \\ 1 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$$

et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{8}(-3-2-1+0+1+2+3+4) = \frac{1}{2}.$$

2. On pose $Y = h_1(X) = |X|$ et $Z = h_2(X) = X^2$ et on a:

$$D_Y = h_1(X) = \{0,1,2,3,4\} \text{ et } D_Z = h_2(Y) = \{0,1,4,9,16\}$$

et les fonctions de masses P_Y et P_Z sont données par:

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$
$$P(Y = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{2}{8},$$
$$P(Y = 2) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{2}{8},$$
$$P(Y = 3) = P(X = 3) + P(X = -3) = \frac{2}{8},$$
$$P(Y = 4) = P(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

et

$$P(Z=0)=P(X=0)=\frac{1}{8}$$
$$P(Z=1)=P(X=1)+P(X=-1)=\frac{2}{8},$$
$$P(Z=4)=P(X=2)+P(X=-2)=\frac{2}{8},$$
$$P(Y=9)=P(X=3)+P(X=-3)=\frac{2}{8},$$
$$P(Y=16)=P(X=4)=\frac{1}{8}.$$

les fonctions de répartitions F_Y et F_Z de Y et Z sont définie par

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 \text{ si } y<0 \\ \frac{1}{8} \text{ si } 0\le y<1 \\ \frac{2}{8} \text{ si } 1\le y<2 \\ \frac{4}{8} \text{ si } 2\le y<3 \\ \frac{6}{8} \text{ si } 3\le y<4 \\ 1 \quad \text{ si } y\ge 4 \end{cases}$$

et

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0 \text{ si } y<0 \\ \frac{1}{8} \text{ si } 0\le z<1 \\ \frac{2}{8} \text{ si } 1\le z<4 \\ \frac{4}{8} \text{ si } 4\le z<9 \\ \frac{6}{8} \text{ si } 9\le z<16 \\ 1 \quad \text{ si } z\ge 16. \end{cases}$$

l'espérance des $V.a.r$ sont donnés par:

$$\mathbb{E}(Y)=0\times\frac{1}{8}+(1+2+3)\times\frac{2}{8}+4\times\frac{1}{8}=2$$

et

$$\mathbb{E}(Z)=0\times\frac{1}{8}+(1+4+9)\times\frac{2}{8}+16\times\frac{1}{8}=5,5.$$

Exercice 4

1. Le support de la $V.a.r$ est $D_X=\{-1,0,1\}$ et sa fonction de masse P_X est définit par

$$\begin{cases} P_X(-1)=P(\{1,3\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \\ P_X(0)=P_X(\{5\})=\frac{1}{6} \\ P_X(1)=P(\{2,4,6\})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2.

$$\mathbb{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\simeq 0,17$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{3} + 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

D'ù

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{5}{6} - \frac{1}{36} = \frac{29}{36} \simeq 0,8.$$

Il est clair que le support de la $V.a.r\ Y$ est $D_Y = \{0,1\}$ et sa fonction de masse P_Y est défint par:

$$P_Y(0) = P_X(0) = \frac{1}{6}$$
$$P_Y(1) = P_X(-1) + P_X(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Donc

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \simeq 0,83.$$

Exercice 5

Déterminons la loi de probabilité de la $V,a,r\ X$: On a:

$$\begin{cases} P(X=1) = \frac{1}{4} = P_1 \\ P(X=2) = (1-P_1)\frac{1}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \\ P(X=3) = (1-P_1)(1-P_2) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ P(X=4) = (1-P_1)(1-P_2)(1-P_3) = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}1 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

La loi de probabilité de la $V,a,r\ X$:

x_i	1	2	3	4	$\sum$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Puisque $P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = P(X=4) = \frac{1}{4}$, on déduit que la V,a,r $X \to U_{\{1,2,3,4\}}$

Calculons:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{5}{2} \\ Var(X) = \frac{n^2+1}{12} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Exercice 6

1. Déterminons la loi de probabilité de la $V.a.X$:

$$D_X = \{-5,-4,8,10\}.$$

et

$$P(X=-5) = \frac{2}{7},\ P(X=-4) = P(V_1).P(R_2|V_1) + P(V_1).P\big(J \text{ ou } R|V_1\big)$$
$$= \frac{4}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{10}{21} \text{ où } J \text{ ou } R \text{ est Jaune ou Rouge}$$

et

$$P(X=8) = P(V).P\big(J \text{ ou } V|V\big)$$
$$= \frac{4}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{21} \text{ où } J \text{ ou } V \text{ est Jaune ou Verte,}$$
$$P(X=10) = \frac{1}{7}$$

Résumé de la loi

$X(\Omega) = x_i$	-5	-4	8	10	$\sum$
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	1

2. Calculons l'espérance mathématique de la $V.a.X$ ainsi que la variance $Var(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = -1,64 \text{ et}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) \text{ tel que: } \mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(X = x_i) = 35,14$$

D'où $Var(X) = 33,84$

Notons "α" le gain algebrique correspondant à l'événement $V_1 \cap R_2$:
On a dond:

$$P(V_1 \cap R_2) = P(V_1).P(R_2|V_1) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{21}.$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = (-5) \times \frac{2}{7} + (-4) \times \frac{10}{21} + \alpha \times \frac{2}{21} + 10 \times \frac{1}{7}$$
$$= \frac{2\alpha - 40}{21}$$

il suffit de résoudre l'équqtion:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 40 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 20 \text{ points.}$$

Exercice 7

1. La loi de probabilité de la $V.a.X$:

$$X = \sum_{i=1}^{8} X_i \text{ tel que } X_i \rightarrow B(0,1)$$

Donc, on en déduit que la $V,a\,X$ suit une loi Binomiale de paramètres $n = 8$ et $P = 0,1$, c'est-à-dire $X \rightarrow B(8,0,1)$;

$$P(X = k) = C_8^k (0,1)^k (0,8)^{8-k}; k \in \{0,1,\ldots,8\}$$

2. La probabilité qu'il'y aucun stylo avec un défaut:

$$P(X = 0) = C_8^0 (0,1)^0 (0,8)^8 = 0,43$$

3. La probabilité qu'il'y au moin un stylo avec un défaut:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,43 = 0,57$$

4. La probabilité qu'il'y moin de deux stylos avec un défaut:

$$P(X < 0) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0,813.$$