République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 1945-Guelma
Faculté Des Sciences Économiques, Commerciales Et Sciences De Gestion
T.C première année L.M.D

1^{er}−semestre 2023/2024. Élément de logique, Analyse combinatoire, Suites numériques, Fonctions logarithmes et exponentielles, Dérivabilité, Calcul intégrales. Présenté par Dr. Azzedine KHENICHE.

PART I

LOGIQUE,ANALYSE COMBINATOIRE, SUITE NUMERIQUES

1 Rappels sur la théorie des ensembles

Le contenu de ce chapitre n'est pas un cours de logique. La logique a pour objet d'étudier les processus de la pensée, elle décrit ce qu'est un raisonnement valide et explique pourquoi un raisonnement donné est valide. Elle est sous-jacente à toute construction mathématique mais aussi à toute construction théorique. Il existe plusieurs forme de logique, logique du premier ordre , logique multivalente, différente forme de logique "floue". Nous présentons ici simplement quelque "élement" de logique du premier ordre qui est la forme de la logique la plus utilisée en mathématique.

1.1. Les deux différents types d'énoncés

Il y a en mathématique deux grandes catégories d'énoncés, les énoncés qui représentent ou désignent les objets étudiés et les énoncés qui affirment une propriété qu'ont (ou n'ont pas) les objets étudiés.

Exemple 1.1.

- *Omar, table, voiture*
- *L'ensemble des entiers naturels.*
- *Omar est un voleur*
- *La voiture est endommagée.*
- *L'application à valeur réelle de la variable réelle* $f : x \to sin(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.
- *Les fonctions polynômiales sont des fonctions croissantes sur* $\mathbb{R}$.

Les énoncés 1 *et* 2 *désignent des objets. Les énoncés* $3, 4, 5et6$ *sont des affirmations.*

Concernant les énoncés désignant des objets, les concepts de vrai ou faux n'ont aucun sens, en revanche un énoncé qui est une affirmation peut être vrai ou faux, on dit qu'il admet une une valeur de vérité.

Exemple 1.2.

- *Dire ou écrire "la fonction sinus est fausse" ou "le lapin est vrai" sont des énoncés qui n'ont pas de sens.*
- *Les fonctions polynômiales sont des fonctions croissantes sur* $\mathbb{R}$*" est une affirmation fausse*

Exercice 1.1. *Parmi les énoncés suivants, lesquels ont un sens ? lesquels désignent un objet ? une affirmation ? lesquels admettent une valeur de vérité ?*

- *Une fourmi de dix-huit mètres ca n'existe pas!*
- *Une fourmi parlant français, parlant latin.*
- *Cette fourmi est fausse.*
- *Une vraie fourmi.*

1.2. Assertions et connecteurs logiques

Définition 1.1. *Une assertion est un énoncé mathématique (ou propriété) à laquelle on attribue l'une des deux valeurs logiques : le vrai (V) ou le faux (F)(valeurs booléennes). Autrement dit c'est la représentation d'une affirmation.*

Exemple 1.3.
- *"$2 + 2 = 4$" est une assertion vraie.*
- *"$2 + 2 = 5$" est une assertion fausse.*
- *"π est un nombre entier" est une assertion fausse.*
- *"Par un point hors d'une droite donnée du plan passe une et une seule droite parallèlle "*
  est une assertion vraie, c'est un des axiomes d'Euclide.

Un axiome ne se démontre pas, il est vrai a priori. C'est sur la collection des axiomes que repose l'ensemble de la théorie : Aprés s'être donné une liste d'axiome on applique des règles de déduction pour trouver de nouvelles assertions vraies. Ces nouvelles assertions sont appelées théorèmes, lemmes, ou corollaires. La distinctions entre ces trois types d'assertion est plutôt de nature culturelle voire émotionnelle, les théor‘emes sont les assertions qui semblent les plus importantes, les lemmes sont des assertions préparatoires aux théorèmes, les corollaires sont des conséquences de théorèmes. Ce qu'on exige de la collection initiale d'axiome est qu'ils ne soient pas contradictoires . Les théorèmes, lemmes et corollaires sont accompagnés d'un texte appelé démonstration ce texte établit la véracité de l'énoncé.

Remarque 1.1. *Pour certaines assertions, on peut décider du caractère vrai ou faux (par exemple, on peut décider que l'assertion $x > 0$ est vraie), mais cela provoque parfois des contradictions. Par exemple, l'assertion "toute règle admet une exception" ne peut pas être vraie. Les deux possibilités sont consignées dans une table de vérité :*

P
V
F

1.3. Connecteurs logiques

Il existe cinq connecteurs logiques, à la base de tout raisonnement mathématique, dont nous allons faire la liste:

(i) Négation (*non*) : À toute assertion P, on peut associer une autre assertion, appelée négation de P et notée $(\neg P)$, qui prend les valeurs :

- Vrai si P est faux.
- faux si P est vrai.

P	$\neg P$
V	F
F	V

Par exemple, si P est : "l'entier n est pair", $(\neg P)$ devient : "l'entier n est impair".

(ii) Disjonction (*ou*) notée $\vee$: L'assertion $(P \vee Q)$ est vraie si l'une au moins des deux assertions P et Q est vraie.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(iii) Conjonction (*et*) notée $\wedge$: L'assertion $(P \wedge Q)$ est vraie si les deux assertions P et Q sont vraies.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(iv) Implication $(\Rightarrow)$: L'assertion $(P \Rightarrow Q)$ est vraie si l'assertion $(\neg P) ou (Q)$ est vraie.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(v) Équivalence ($\Leftrightarrow$) : L'assertion ($P \Leftrightarrow Q$) est vraie si les deux assertions ($P \Rightarrow Q$) et($Q \Rightarrow P$) est vraie.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque 1.2. *(i) $P \Rightarrow Q$ signifie que "Si P est (vraie), alors Q est (vraie)", ou encore "P est une condition suffisante pour Q", ou enfin "Q est une condition nécessaire pour P"*

(ii) $P \Leftrightarrow Q$ s'écrit aussi "P si et seulement si Q", ou encore "P est une condition nécessaire et suffisante pour Q"

(iii) Si P et Q sont simultanément fausses, alors ($P \Rightarrow Q$) est vraie. Par exemple $((1 > 2) \Rightarrow (2 > 3))$ est une assertion vraie.

(iv) $P \Rightarrow Q$ n'a pas la même valeur logique que $Q \Rightarrow P$. Par exemple, pour $x \in \mathbb{R}, (x = 1 \Rightarrow x > 0)$ est une assertion vraie, mais $(x > 0 \Rightarrow x = 1)$ est une assertion fausse.

On peut résumer les différentes valeurs logiques prises par ces connecteurs logiques en fonction des valeurs logiques de P et Q dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Proposition 1.1. *(Propriétés des connecteurs logiques)*

(i) Si ($P \Rightarrow Q$) est vraie et si ($Q \Rightarrow R$) est vraie, alors ($P \Rightarrow R$) est vraie.

(ii) $\neg(\neg P)$ a même valeur logique que P.

(iii) $\neg(P \wedge Q)$ a même valeur logique que $(\neg P) \vee (\neg Q)$

(iv) $\neg(P \vee Q)$ a même valeur logique que $(\neg P) \wedge (\neg Q)$

(v) $P \wedge (Q \vee R)$ a même valeur logique que $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(vi) $P \vee (Q \wedge R)$ a même valeur logique que $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Proof.

Toutes ces propriétés se retrouvent à l'aide de tables de vérité. Par exemple, pour (iii) on a :

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

$\square$

Ce tableau nous permet de constater que les valeurs logiques prises par la propriété $\neg(P \wedge Q)$ coïncident avec celles de la propriété $(\neg P) \vee (\neg Q)$. On pourra démontrer le reste de la même façon.

Remarque 1.3. *Il est essentiel de savoir formuler la négation d'une propriété P. En effet comme les valeurs logiques de la propriété P et de la propriété $\neg P$ sont inverses, il suffit de démontrer que $\neg P$ est vraie pour établir que P est fausse.*

Exercice 1.2. *(Contraposition)*
Montrer que l'assertion $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ est toujours vraie.

1.4. Quantificateurs

Définition 1.2. ***(prédicat)***
Soit E un ensemble. Pour un élément x de E, on note $P(x)$ une assertion dont la valeur logique dépend d'une variable notée x. $P(x)$ est appelé un prédicat. Par exemple, pour $E = \mathbb{R}$, le prédicat $P(x)$: "$x > 0$" est vrai pour la valeur $x = 1$, et faux pour la valeur $x = -1$.

Définition 1.3. ***(Quantificateurs)***

(i) On définit le quantificateur universel, noté $\forall$ (quelque soit) de la manière suivante :

$$\forall x \in E, P(x)$$

signifie que le prédicat $P(x)$ est vrai pour toute valeur de x prise dans E, ou encore :

$$\{x \in E \ / P(x) \quad est \quad vrai\} = E$$

(ii) On définit le quantificateur existentiel, noté $\exists$ (il existe) de la manière suivante :

$$\exists x \in E, P(x)$$

signifie que le prédicat $P(x)$ est vrai pour au moins une valeur de x prise dans E, ou encore :

$$\{x \in E \ / P(x) \quad est \quad vrai\} \neq \phi$$

Proposition 1.2. *On exprime la négation des quantificateurs de la manière suivante:*

(i) L'assertion $non(\exists x \in E, P(x))$ *est logiquement équivalente à* $(\forall x \in E, non\ P(x))$.

(ii) L'assertion $non(\forall x \in E, P(x))$ *est logiquement équivalente à* $(\exists x \in E, non\ P(x))$.

Exemple 1.4.

$$\begin{aligned} non(\forall x \in E, [\exists y \in F, (\forall z \in G, P(x,y,z))]) &\Leftrightarrow \exists x \in E, non[\exists y \in F, (\forall z \in G, P(x,y,z))]) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E, \forall y \in F, non[(\forall z \in G, P(x,y,z))]) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E, \forall y \in F, \exists z \in G, non\ P(x,y,z)\,. \end{aligned}$$

Proposition 1.3. *On peut inverser deux quantificateurs de même nature :*

(i) $(\exists x \in E, \exists y \in F / P(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y \in F, \exists x \in E / P(x,y))$

(ii) $(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x,y))$

(ii) $(\forall x \in E, \exists y \in F, P(x;y))$ *n'est en général pas équivalent à* $(\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y))$

Exemple 1.5.

(i) Si $E = \mathbb{R}_-^*$ *et* $F = \mathbb{R}_+^*$ *alors on a* $(\forall x < 0, \forall y > 0 : xy < 0)$*, ce qui équivaut à* $(\forall y > 0, \forall x < 0 : xy < 0)$.

(ii) Si $E = F = \mathbb{R}_+^*$*, alors l'assertion* $(\forall x > 0, \exists y > 0 : xy = 1)$ *est vraie. En effet, pour tout* x *réel strictement positif, il existe* $y = \frac{1}{x} > 0$ *tel que* $xy = 1$*. En revanche, l'assertion* $(\exists y > 0, \forall x > 0 : xy = 1)$ *est fausse. On peut le prouver à l'aide de la remarque 1.3. La négation de cette assertion est :* $(\forall y > 0; \exists x > 0; xy \neq 1)$.
Cette nouvelle assertion est vraie car pour y *réel strictement positif quelconque, il existe* $x = \frac{2}{y} > 0$ *tel que* $xy = 2 \neq 1$.

2 Analyse Combinatoire

2.1. Notion de factorielle

- L´analyse Combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets.
- Elle fournit des méthodes de dénombrements particuliérement utiles en théorie des probabilités

Définition 2.1. *La factorielle d´un entier positif n est le produit de tous les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n. On utilise la notation $n!$ que l´on lit factorielle n, pour la désigner. Par conséquent,*

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1.$$

Par convention, la factorielle de 0 est égale à 1, c´est-à-dire $0! = 1$

D´aprés la définition, il est aisé de voir que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ n! = n(n-1)!$$

À bien des égards, il s´agit de la propriété clé des factorielles et nous allons l´appliquer à maintes reprises pour résoudre des problèmes impliquant des factorielles.

Exemple 2.1. *Déterminez l´ensemble solution pour $(n-26)! = 0!$?*
On doit considérer les deux cas:$(n-26) = 0$ et $(n-26) = 1$. Par conséquent, nous concluons que $n = 26$ et $n = 27$ sont les deux solutions possibles. L´ensemble solution est donc $\{26, 27\}$.

Exemple 2.2. *Déterminez la valeur de n tel que: $n(8n-1)! = 5040$?*
Considérons d´abord la valeur 5040. Comme nous avons le produit d´une factorielle et d´un entier sur le membre gauche de l´équation, nous souhaiterions exprimer 5040 comme une factorielle ou comme le produit d´une factorielle et d´un autre entier. Pour cela, on peut le diviser consécutivement par les nombres

naturels:

$$\begin{aligned}
5040 &= 5040 \times 1 \\
&= 2520 \times 2 \times 1 \\
&= 840 \times 3 \times 2 \times 1 \\
&= 210 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\
&= 42 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\
&= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\
&= 7!\,.
\end{aligned}$$

On peut maintenant étudier l´autre membre de l´équation:
On rappelle que pour un entier positif n, $n! = n(n-1)!$
On a

$$n(8n-1)! = \frac{1}{8}(8n)(8n-1)! = \frac{1}{8}(8n)!$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{8}(8n)! = 7! \Rightarrow (8n)! = 8 \times 7! = 8!,\ d'ou \quad n = 1$$

Terminons par résumer quelques concepts importants:

(i) La factorielle d´un entier positif n est définie comme le produit de tous les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n. On la note $n!$.

(ii) La propriété clé de la factorielle est $n! = n(n-1)!$. Grâce à celle-ci, on peut souvent simplifier des expressions impliquant des factorielles et résoudre des équations factorielles.

(iii) Lorsque l´on essaie de déterminer un entier inconnu à partir de sa factorielle, on le divise par des entiers strictement positifs consécutifs.

La plupart des calculatrices scientifiques ont un bouton permettant de calculer la factorielle d´un nombre. Dans des exemples comme le premier que nous avons étudié, il serait tout à fait légitime d´utiliser simplement une calculatrice pour calculer l´expression. Cependant, cela n´est pas toujours possible. Les factorielles augmentent en fait tellement rapidement que la plupart des calculatrices ne peuvent pas calculer des factorielles de nombres supérieurs à 69. Cela ne signifie cependant pas que nous sommes incapables de les utiliser. Au lieu de cela, utiliser les propriétés des factorielles nous permettra de résoudre des problèmes qui impliquent des nombres trop grands pour nos calculatrices.

2.2. Principe fondamental de dénombrement

Le principe fondamental de dénombrement permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences.
Considérons un ensemble E formé de vecteurs de p composantes tel que :
- La composante numéro 1 est choisie dans un ensemble de N_1 éléments distincts.
- La composante numéro 2 est choisie dans un ensemble de N_2 éléments distincts.
- La composante numéro p est choisie dans un ensemble de N_p éléments distincts.
Donc

$$card(E) = N_1 \times N_2 \times ...... \times N_p$$

. Ce résultat porte le nom du Principe fondamental d´Analyse Combinatoire.

Exemple 2.3. *Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 5 entrées, 4 plats et 3 desserts ?*
On applique le principe fondamental de l´analyse combinatoire :
On peut donc composer $5 \times 4 \times 3 = 60$ *menus différents.*

Remarque 2.1. *Pour toute la suite on considère E un ensemble à n éléments.*

2.3. Les méthodes de dénombrement

Les méthodes de dénombrement se classeront selon 3 catégories:

- Les arrangements
- Les permutations
- Les combinaisons

2.3.1. Arrangement sans répétition

Définition 2.2. *On appelle arrangement de p éléments parmi n éléments de $E, (p \leq n)$, toute suite ordonnée et sans répétition de p éléments parmi n.*

Exemple 2.4. *Les arrangements à 2 éléments de l´ensemble* $\{1, 2, 3\}$ *sont* $(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$

Théoreme 2.1. *Le nombre d´arrangement de p éléments parmi n est :*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1).......(n-p+1)$$

Proof. Il y a n façons de choisir le premier élément de l´arrangement parmi les n éléments de l´ensemble. Pour le deuxième élément de l´arrangement il y a $(n-1)$ façons de le choisir, puisqu´il ne doit pas y avoir répétition d´un élément.

En itérant on vérifie qu´il y a $(n-p+1)$ façons de choisir le pième élément de l´arrangement. Au total, le nombre d´arrangements d´aprés le principe de dénombrement est donc

$$n(n-1)............(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p$$

. □

Exemple 2.5. *Combien de nombres de deux chiffres distincts peut-on former avec les chiffres :*$1, 2, 3, 4, 5.$*?*
On voit bien que c´est un arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 5, c´est-à-dire :$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$
On peut alors former 20 nombres de deux chiffres distincts avec les chiffres :$1, 2, 3, 4, 5.$

2.3.2. Arrangement avec répétition

Définition 2.3. *On appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n toute suite ordonnée de p éléments parmi n avec répétition d´un ou plusieurs éléments parmi n.*

Théoreme 2.2. *Si on note $(A_n^p)^{'}$ le nombre d´arrangement avec répétition de p éléments parmi n, alors :*

$$(A_n^p)^{'} = n^p$$

Proof. il y a n faons de choisir le premier élément de l´arrangement parmi les n éléments de l´ensemble. Pour le deuxième élément de l´arrangement il y a également n faons de le choisir, car le premier élément fait de nouveau parti des n éléments.
En itérant on vérifie qu´il y a n faons de choisir le pième élément de l´arrangement. Au total, le nombre d´arrangements d´aprés le principe de dénombrement est donc :

$$(A_n^p)^{'} = n^p$$

□

Exemple 2.6. *Combien de nombres de deux chiffres peut-on former avec les chiffres :*$1, 2, 3, 4, 5.$*?*
On voit bien que c´est un arrangement avec répétition de 2 éléments parmi 5, c´est-à-dire :$(A_5^2)^{'} = 5^2 = 25$
On peut alors former 25 nombres de deux chiffres avec les chiffres :$1, 2, 3, 4, 5.$

2.3.3. Permutation sans répétition

Définition 2.4. *On appelle permutation sans répétition de n éléments distincts tout arrangement de n éléments parmi n. Ainsi le nombre de permutation de n éléments est donn par:*

$$P_n = n!$$

P_n: nombre de permutations de n objets distincts.

Exemple 2.7. *Le nombre de permutations des lettres du mot "IMAGE" est* $P_n = 5! = 120$ *Le nombre de permutations des lettres du mot "mathsup" est* $P_n = 7!$

2.3.4. Permutation avec répétition

Définition 2.5. *Le nombre de permutations de n éléments avec répétitions est donné par :*

$$P_n^{'} = \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots\dots \times r_k!}$$

où $r_1, r_2, ..., r_k$ désignent le nombre d´objets identiques.

Exemple 2.8. *Le nombre de permutations des lettres du mot "STATISTIQUES" est* $P_{12}^{'} = \frac{12!}{3!\times 3!\times 2!} = 6652800$
Le nombre de permutations des lettres du mot "cocacola" est $P_8^{'} = \frac{8!}{3!\times 2!\times 2!}$

2.3.5. Combinaison

Définition 2.6. *Soit E un ensemble à n éléments.*
On appelle combinaison de p éléments parmi n toute partie de E à p éléments.

Théoreme 2.3. *Si on note C_n^p le nombre de combinaison de p éléments parmi n, alors:*

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Exemple 2.9. *Dans une classe de* 30 *élèves, on doit élire deux délégués. Quel est le nombre de choix possibles?*
Il s´agit d´une combinaison de 2 éléments distincts parmi 30, *c´est-à-dire:*

$$C_{30}^2 = \frac{30!}{2! \times (30-2)!} = 435$$

Remarque 2.2. *Une combinaison de p éléments parmi n peut-être associée un tirage simultané de p boules dans une urne qui en comporte n.*

Théoreme 2.4. *(Propriétés des coefficients binomiaux)*
Pour tous entiers naturels n et p tels que $0 \leq p \leq n$, on a:

(i) $C_n^0 = C_n^n = 1$;

(ii) $C_n^p = C_n^{n-p}$;

(iii) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ *(Relation de Pascal)*;

(iv) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ *(binôme de Newton)*.

Remarque 2.3. $C_n^p = C_n^{n-p}$, *Construire une partie de* p *éléments de* E *revient à construire une partieà* (np) *éléments de* E *ceux qui restent, donc* $C_n^p = C_n^{n-p}$

Remarque 2.4. *(Triangle de Pascal) La formule de Pascal permet de calculer les coefficients d´ordre* $(n+1)$ *à partir des coefficients d´ordre* n*. Ces coefficients forment le triangle de Pascal.*

n, p	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Exemple: $C_4^1 + C_4^2 = C_5^2 \Rightarrow 4 + 6 = 10$

3 Suites Numériques

3.1. Suites numériques

Les suites numériques sont utilisées pour modéliser les phénomènes socio économique comme la production d´une entreprise peut s´écrire ou s´exprimer sous forme d´une suite numérique.
L'étude des suites numériques a pour objet la comprhension de l'évolution de séquences de nombres (réels, complexes...). Ceci permet de modéliser de nombreux phénomènes de la vie quotidienne. Supposons par exemple que l'on place une somme S à un taux annuel de 10%. Si S_n représente la somme que l'on obtiendra aprés n années, on a:

$$S_0 = S, S_1 = S \times (1,1), ..., S_n = S \times (1,1)^n.$$

Au bout de $n = 10$ ans, on possèdera donc $S_{10} = S \times (1,1)^{10} \approx S \times 2,59$: la somme de départ avec les intérêts cumulés.
En économie, on a souvent besoin d´étudier des suites de données numériques, en particulier quand on suit l´évolution des valeurs d´une variable économique au cours du temps. On peut étudier par exemple la suite formée des valeurs successives:
du PIB chaque année;
du taux de chômage chaque mois;
du taux d´inflation chaque année.
Il est donc utile pour l´économiste de savoir analyser des suites de nombres et répondre à des questions comme:
Les valeurs dúne suite sont-elles de plus en plus élevées (on dit que la suite est croissante)?
Les valeurs de cette suite varient-elles de moins en moins avec le temps, pour se rapprocher d´un nombre donné (on dit que la suite est convergente)?
L´étude mathématique des suites numériques (ou suites de nombres réels) permet de répondre à ce type de questions, comprendre la notion de suite de nombre réels et les principaux outils en relation avec elle: croissance, décroissance, suite arithmétique, suite géométrique. Savoir ce qu´est une suite convergente, et comment on peut démontrer la convergence, utiliser les suites récurrentes linéaires pour calculer le capital dont on dispose au bout de n périodes, quand on a un taux d´intérêt fixe et que l´on place chaque année des sommes variables. Il nous faut d´abord donner une définition mathématique à cette idée de suite de nombres.
L´idée de départ est qu´on a un premier nombre, que l´on peut noter par exemple U_1, puis un deuxième que l´on notera U_2, puis un troisième noté.....

3.2. Généralités

Définition 3.1.

- *Une suite est une application* $U : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on note* $U(n)$ *par* U_n *(se lit "U indice n") et on l'appelle* n*-ème terme ou terme général de la suite.*

La suite est notée plus souvent $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (U_n). Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(U_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple 3.1. *(Modes de génération d'une suite)*

- *Suites définies par une formule explicite: On peut définir une suite numérique* (U_n) *à l'aide d'une fonction* f *définie sur* $[0, +\infty[$ *en posant, pour tout entier* n, $U_n = f(n)$. *On peut calculer directement, à partir de* n, *le terme de rang* n. *par exemple:*

  - *La suite* $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ *est la suite de termes:* $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ...$
  - *La suite* $(-1)^n_{n\geq 0}$ *est la suite qui alterne:* $+1, -1, +1, -1, ...$
  - *La suite* $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$ *est la suite de termes:* $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...$

- *Suites définies par récurrence: dans cas, un terme de la suite s'écrit en fonction du ou des précédents), par exemple:*

  - *La suite définie par la donnée de* U_0 *et une relation de recurence* $U_{n+1} = U_n + 2$, U_1 *se déduit de* U_0, U_2 *se déduit de* U_1, U_3 *de* U_2, ,U_{n+1} *de* U_n,...
  - *La suite* $(F_n)_{n\geq 0}$ *définie par* $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ *et la relation* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *(suite de Fibonacci). Les premiers termes sont* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ *Chaque terme est la somme des deux précédents.*

Définition 3.2. ***(Suite majorée, minorée, bornée)***

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite.*

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée si* $\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq M$.

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée si* $\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq m$.

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire : si*

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} : |U_n| \leq M$$

.

Définition 3.3. ***(Suite croissante, décroissante)***

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite.*

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante si* $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq U_{n+1}$.

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante si* $\forall n \in \mathbb{N} : U_n < U_{n+1}$.

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} \leq U_n$.

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} < U_n$.

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone si elle est croissante ou décroissante.*
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Remarque 3.1.

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$

Exemple 3.2.

- *La suite* $(U_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ *pour* $n \geq 1$*, n'est ni croissante ni décroissante. Elle est majorée par* $\frac{1}{2}$*(borne atteinte en* $n = 2$*), minorée par* -1 *(borne atteinte en* $n = 1$*).*

- *La suite* $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ *est une suite strictement décroissante. Elle est majorée par* 1 *(borne atteinte pour* $n = 1$*), elle est minorée par* 0 *mais cette valeur n'est jamais atteinte.*

Exercice 3.1.

1. *La suite* $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *est-elle monotone ? Est-elle bornée ?.*

2. *La suite* $\frac{n\sin(n!)}{1+n^2}{}_{n\in\mathbb{N}}$ *est-elle bornée ?.*

3. *Réécrire les phrases suivantes en une phrase mathématique. Écrire ensuite la négation mathématique de chacune des phrases.*

(a) *La suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée par* 5.

(b) *La suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante.*

(c) *La suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement positive à partir d'un certain rang.*

(d) *La suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas strictement croissante.*

4. *Est-il vrai qu'une suite croissante est minorée ? Majorée?.*

5. *Soit* $x > 0$ *un réel. Montrer que la suite* $(\frac{x^n}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante à partir d'un certain rang.*

3.3. Limite finie, limite infinie

Définition 3.4.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*
La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a pour limite* $l \in \mathbb{R}$ *si: pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un entier naturel* N *tel que si* $n \geq N$ *alors* $|U_n - l| \leq \varepsilon$*:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |U_n - l| \leq \varepsilon$$

On dit aussi que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l. Autrement dit : U_n est proche d'aussi prés que l'on veut de l à partir d'un certain rang.

Définition 3.5.

(i) *La suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ *si :*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow U_n \geq A$$

(ii) *La suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$ *si :*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow U_n \leq -A$$

Remarque 3.2.

(i) *On note* $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$

(ii) *On raccourcit souvent la phrase logique en:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |U_n - l| \leq \varepsilon$$

Noter que N *dépend de* ε *et qu'on ne peut pas échanger l'ordre du "pour tout" et du "il existe".*

(iii) *L'inégalité* $|U_n - l| \leq \varepsilon$ *signifie* $l - \varepsilon \leq U_n \leq l + \varepsilon$ *On aurait aussi pu définir la limite par la phrase:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$$

où l'on a remplacé la dernière inégalité large par une inégalité stricte.

Définition 3.6.

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers* $\pm\infty$*, soit elle n'admet pas de limite).*

Proposition 3.1. ***(Unicité de la limite)***
Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Proof. Exercice. □

Proposition 3.2. ***(Propriétés des limites)***

(i) $\lim_{n\to\infty} U_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (U_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |U_n - l| = 0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} U_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |U_n| = |l|$

Proof.

Cela résulte directement de la définition. □

Théoreme 3.1.

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes.*

(i) *Toute suite croissante et majorée est convergente.*

(ii) *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Proof. Exercice □

Proposition 3.3. ***(Opérations sur les limites)***

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes.*

(i) *Si* $\lim_{n\to\infty} U_n = l$ *où* $l \in \mathbb{R}$*, alors pour* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a* $\lim_{n\to\infty} \lambda U_n = \lambda l$

(ii) *Si* $\lim_{n\to\infty} U_n = l$ *et Si* $\lim_{n\to\infty} V_n = l'$ *où* $l, l' \in \mathbb{R}$*, alors:*

$$\lim_{n\to\infty} (U_n + V_n) = l + l'$$

et

$$\lim_{n\to\infty} (U_n \times V_n) = l \times l'$$

(iii) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$ *où* $l \in \mathbb{R}^*$, *alors:* $U_n \neq 0$ *pour* n *assez grand et* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{U_n} = \frac{1}{l}$

Proof. Exercice □

Exemple 3.3.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$ *avec* $l \neq \pm 1$, *alors:*

$$\lim_{n\to\infty} U_n(1-3U_n) - \frac{1}{U_n^2 - 1} = l(1-3l) - \frac{1}{l^2-1}$$

Proposition 3.4. ***(Opérations sur les limites infinies)***

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que* $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = +\infty$.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{V_n} = 0$.

(ii) *Si* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée alors*

$$\lim_{n\to\infty} (U_n + V_n) = +\infty$$

(iii) *Si* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par un nombre* $\lambda > 0$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} (U_n \times V_n) = +\infty$$

(iv) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$. *et* $U_n > 0$ *pour* n *assez grand alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{U_n} = +\infty$$

Proof. Exercice □

Exemple 3.4.

La suite $\sqrt{n}$ *tend vers* $+\infty$, *donc la suite* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *tend vers* 0.

Proposition 3.5. *Toute suite convergente est bornée.*

Proof. Exercice □

Proposition 3.6. *Si la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et* $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = 0$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} (U_n \times V_n) = 0$$

Proof. Exercice □

Exercice

3.4. Formes indéterminées

Dans certaines situations, on ne peut rien dire à priori sur la limite, il faut faire une étude au cas par cas.

Exemple 3.5. *(i)* $+\infty - \infty$: *il faut faire l'étude en fonction de chaque suite pour déterminer* $\lim\limits_{n\to\infty}(U_n + V_n)$ *comme le prouve les exemples suivants:*

- $\lim\limits_{n\to\infty}(\exp n - \ln n) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(n - n^2) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}((n + \frac{1}{n}) - n) = 0$

(ii) $0 \times \infty$: *par exemple;*

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} \times \exp n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} \times \ln n = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} \times (n+1) = 1$

(iii) $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, ...$

3.5. Limite et inégalités

Proposition 3.7.

(i) Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes telles que* $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$*, alors:*

$$\lim_{n\to\infty} U_n \leq \lim_{n\to\infty} V_n$$

(ii) Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que* $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$*, et* $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty$ *alors:*

$$\lim_{n\to\infty} V_n = +\infty$$

(iii) ***Théorème des "gendarmes"**: Si* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont trois suites telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n \leq W_n$$

, et $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} W_n = l$*, alors:*

$$\lim_{n\to\infty} V_n = l$$

Proof. Exercice. □

Exemple 3.6. *Soit la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $U_n = \frac{2n+(-1)^n}{n+1}$. *On considère alors les suites* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$V_n = \frac{2n-1}{n+1}, W_n = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Alors, pour tout entier naturel n*,*

$$V_n \leq U_n \leq W_n$$

De plus,

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} W_n = 2$$

donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to\infty} U_n = 2$.

3.6. Suites adjacentes

Définition 3.7.

On dit que deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées:*

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante;*
- *Pour tout entier naturel* n*,* $U_n \leq V_n$*;*
- $\lim_{n\to\infty} (U_n - V_n) = 0$

Exemple 3.7. *Les suites* $U_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ *et* $V_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ *sont des suites adjacentes.*

3.7. Suites arithmétiques

Définition 3.8.

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique s'il existe un réel* r *tel que pour tout entier naturel* n *, on ait :* $U_{n+1} = U_n + r$.
Il revient au même de dire que pour tout entier naturel n*,* $U_n = U_0 + nr$*, c'est-à-dire que* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite affine .*
r *est appelé raison de la suite arithmétique.*

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r , on a :

$$U_n = U_p + (n-p)r.$$

Exemple 3.8. • *la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $V_0 = 4$ *et* $V_{n+1} = V_n + 3$ *est arithmétique de premier terme* 4 *et de raison* 3.

- *La suite des naturels est arithmétique de premier terme* 0 *et de raison* 1.
- *La suite des naturels impairs est arithmétique de premier terme* 1 *et de raison* 2

•**Somme des termes consécutifs**:
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la demi-somme des extrèmes.

$$S = nombre\ de\ termes\ \times \frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2}$$

Exemple 3.9. • $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- $S = U_0 + U_1 + U_3 + ... + U_n = (n+1) \times \frac{U_0+U_n}{2}$
- $S = U_p + U_{p+1} + ... + U_n = (n-p+1) \times \frac{U_p+U_n}{2}$

3.8. Suites géométriques

Définition 3.9.

Une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique s'il existe un réel* q *tel que pour tout entier naturel* n *, on ait :* $V_{n+1} = q \times V_n$
Il revient au même de dire que pour tout entier naturel n, $V_n = q^n \times V_0$, *c'est-à-dire que* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite exponentielle .*
q *est appelé raison de la suite géométrique.*

Si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q , on a :

$$V_n = V_p \times q^{n-p}$$

Exemple 3.10. • *la suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $V_0 = -3$ *et* $V_{n+1} = 5 \times V_n$ *est géométrique de premier terme* 3 *et de raison* 5.

- *La suite des puissances successives de* (2) *est géométrique de premier terme* 1 *et de raison* 2

•**Somme des termes consécutifs**:
La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q?1 est égale à:

$$S = terme\ initial\ \times \frac{1 - q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$$

Exemple 3.11. *pour tout entier naturel n,*

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \begin{cases} 1 & , \text{ si } q = 0 \\ n+1 & , \text{ si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & , \text{ si } non \end{cases} .$$

Exemple 3.12.

- $S = V_0 + V_1 + V_3 + ... + V_n = V_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $S = V_p + V_{p+1} + ... + V_n = V_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

PART II

FONCTION EXPONENTIELLE, LOGARITHME NÉPÉRIEN ET DÉRIVABILITÉ

4 Fonction exponentielle et logarithme népérien

4.1. Rappels sur la fonction exponentielle

4.1.1. Définitions et propriétés

En mathématiques, ces fonctions sont d´une importance considérable et ont des applications dans presque tous les domaines de l´investigation humaine. Elles se révèlent particulièrement utiles dans les domaines de la chimie, de la biologie, de la physique et des sciences de l´ingénieur, où elles contribuent à décrire la croissance ou la décroissance de certaines quantités de la nature.
La fonction exponentielle est la fonction notée *exp* qui est égale à sa propre dérivée et prend la valeur 1 en 0. Elle est utilisée pour modéliser des phénomènes dans lesquels une différence constante sur la variable conduit à un rapport constant sur les images. Ces phénomnes sont en croissance dite exponentielle .
On note e la valeur de cette fonction en 1. Ce nombre e qui vaut approximativement $2,71828$ s´appelle la base de la fonction exponentielle et permet une autre notation de la fonction exponentielle:

$$\forall x \quad \exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

La fonction exponentielle est la seule fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui transforme une somme en produit et qui prend la valeur e en 1. C´est un cas particulier des fonctions de ce type appelées exponentielles de base a.
On peut la déterminer comme limite de suite ou à l´aide d´une série entière.
C´est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.
Les applications élémentaires des fonctions exponentielles réelles ou complexes concernent la résolution des équations différentielles, la mise en place de la théorie de Fourier mais les champs d´applications des fonctions exponentielles sont extrêmement vastes : étude de la croissance des groupes, etc.
On appelle aussi parfois fonction exponentielle toute fonction dont l´expression est de la forme $f(x) = Ae^{\alpha x}$.

Définition 4.1. *La fonction exponentielle, notée exp, est l´unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et vérifiant: $exp(0) = 1$.*

Remarque 4.1. *En admettant l´existence d´une telle fonction, on montre l´unicité en montrant que la fonction exp ne s´annule pas sur $\mathbb{R}$.*

Théoreme 4.1. *(Propriétés)*

(i) *Relation fonctionnelle:* $\forall a, b \in \mathbb{R}: \ exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$*;*

(ii) *Positivité:* $\forall x \in \mathbb{R}: \ exp(x) > 0$*;*

(iii) *Monotonie: La fonction exp est croissante sur* $\mathbb{R}$*;*

(iv) *Notation d´Euler: On pose* $exp(x) = e^x$ *avec* $e = exp(1) = 2,718$*. Alors:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$*:*

- $e^{a+b} = e^a e^b$;
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$;
- $e^{na} = (e^a)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 4.2.
- *La relation fonctionnelle pourrait servir de définition à la fonction exponentielle: unique fonction qui prend la valeur 1 en 0 et qui transforme une somme en produit.*
- *On obtient une approximation de e par l´approximation affine de l´exponentielle en a:* $e^{a+p} \approx e^a(1+p)$ *oú p est le pas.*

Théoreme 4.2. *(Équation et inéquation)*

- *De la monotonie de la fonction exp, on a* $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$*;*
- *De la croissance de la fonction exp, on a:* $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$*.*

Exemple 4.1.
- *Résoudre dans* $\mathbb{R}$*:* $e^{2x^2+3} = e^{7x}$
$e^{2x^2+3} = e^{7x} \xLeftrightarrow{monotonie} 2x^2+3 = 7x \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$ *d'ou* $S = \{\frac{1}{2}, 3\}$
- *Résoudre dans* $\mathbb{R}$*:* $e^{3x} \leq e^{x+6}$
De la croissance de la fonction exp*, on obtient:*

$$e^{3x} \leq e^{x+6} \Leftrightarrow 3x \leq x+6 \Leftrightarrow S =]-\infty, 3]$$

4.1.2. Limites

Théoreme 4.3. *On a:* $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Proof.

Soit la fonction f suivante: $f(x) = e^x - x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^x - 1$, et de la croissance de la fonction exp on a $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

On obtient le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Du tableau de variation on en déduit que: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ donc $e^x > x$, par comparaison: $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
En $-\infty$, on pose $X = -x$, d´où: $\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$

$\square$

4.1.3. Courbe représentative

D´aprés les résultats obtenus, on a le tableau de variation et la courbe suivante: