Faculté des SMMI

Département d'informatique

07.12. 2023. Micro interrogation : **Module de Probabilités, statistique 2**

Niveau : **2 ème année Ing Info.** **Durée $1^{\mathbf{H}}$**

Exercice 1

Une usine fabrique des composants électroniques. La probabilité qu'un composant soit défectueux $\mathbf{0,02}$. On considère un échantillon de $\mathbf{100}$ objets. Soit $\mathbf{X}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de composants défectueux.

1) Donner la loi que suit $\mathbf{X}$ et sa formule.

2) Quelle est la probabilité qu'aucun objet ne soit défectueux ?

3) Quelle est la probabilité que deux objets soient défectueux ?

Exercice 2

On considère une variable aléatoire $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ définie par la loi de probabilité:

$$\forall i \in \mathbb{N}^* : P\left(X = i\right) = \frac{a}{3^i}$$

Soit Y une variable aléatoire telle que, sachant $X = i$, la loi de Y est l'équiprobabilité sur $\{i, i+1\}$.

1) Déterminer la valeur de a. Reconnaître la loi de X. Déduire $\mathbb{E}\left(X\right)$.

2) Pour tout $i \in N^*$, déterminer $\mathbb{E}\left(Y \left| X = i\right.\right)$. En déduire $\mathbb{E}\left(Y \left| X\right.\right)$, puis $\mathbb{E}\left(Y\right)$.

Corrigé du Micro interro

Exercice 1

1) La loi suivie par X : qui compte le nombre de composants défectueux est la loi Binomiale de paramètres $n = 100$ et $P = 0.02$, on écrit $X \rightarrow B(100, 0.02)$ et

$$\begin{aligned} P(X = k \text{ représente le nombre de composants défectueux}) &= C_{100}^{k}(0.02)^{k}(1-0.01)^{100-k}\,; \\ k &\in \{0, 1, ..., 100\} \end{aligned}$$

2) La probabilité qu'aucun objet ne soit défectueux:

$$P(X=0) = C_{100}^{0}(0.02)^{0}(1-0.02)^{100-0} = (0.98)^{100}$$

3) La probabilité que deux objets soient défectueux:

$$P(X=2) = C_{100}^{2}(0.02)^{2}(1-0.02)^{100-2} = C_{100}^{2}(0.02)^{2}(0.98)^{98}$$

avec

$$C_{100}^{2} = \frac{100!}{2!\,(100-2)!} = 199 \times 100$$

Exercice 2

1. Déterminons la valeur de a :

i. $\forall i \in \mathbb{N}^* : P(X = i) = \dfrac{a}{3^i} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$

ii. $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} \dfrac{a}{3^i} = 1 \Rightarrow a \underbrace{\sum_{i\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{3^i}}_{\textbf{Série géométrique}} = 1$, de somme est égale à $a\left[\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = 1\right]$,

alors donc $a = 2$. On en déduit que la loi de X est donnée par

$$\forall i \in \mathbb{N}^* : P(X=i) = \frac{2}{3^i} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}; i = 1, 2, ...$$

Nous en déduisons que la loi de X est une loi géométrique de paramètre $P = \dfrac{2}{3}$, et on écrit $X \rightarrow G\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

Déduisons l'espérance de X :

Puisque $X \rightarrow G\left(\dfrac{2}{3}\right)$, alors donc

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{P} = \frac{3}{2}$$

2. $\forall i \in N^*$, la loi de Y sachant que $\{X = i\}$ est l'équiprobabilité sur $\{i, i+1\}$, c'est-à-dire que $Y|\ X \rightarrow \mathcal{U}_{\{i,i+1\}}$ ceci implique que

$$\mathbb{E}\left(Y|X=i\right) = \frac{i+i+1}{2} = \frac{2i+1}{2}\ \forall i \in N^* \Rightarrow \mathbb{E}\left(Y|X\right) = \frac{2X+1}{2}.$$

La valeur de $\mathbb{E}\left(Y\right)$:

D'aprés la formule de l'espérance totale on obtient donc:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(Y|X\right)\right] = \mathbb{E}\left(Y\right)$$

alors donc

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(Y|X\right)\right] = \mathbb{E}\left(\frac{2X+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(2X+1\right) = \mathbb{E}\left(X\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Ce qui donne

$$\mathbb{E}\left(Y\right) = 2.$$