Université 8 Mai 1945-Guelma **Année universitaire 2023-2024**
Facultés de MISM **Département d'informatique**
Niveau: **2 -ème année ingénieur en informatique**

Série de TD N^o: 3

Module: **Probabilites et Statistique**

Exercice 1

Un certain matériel a une probabilité $p = 0,02$ de défaillance à chaque mise en service. On procède à l'expérience suivante, l'appareil est mis en marche, arrêté, remis en marche, arrêté, jusqu'à ce qu'il tombe en panne. Soit X la v.a. représentant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la panne.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a X ?
2. Quelle est la probabilité que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au dixième essai?

Exercice 2

Dans une carrière de marbre, un contrôle est effectué sur des dalles destinées à la construction. La surface des dalles est vérifiée pour détecter d'éventuels éclats ou taches. Il a été constaté qu'en moyenne il ya **1**,**2** défaut par dalle et que le nombre de défauts par dalle suit une loi de **Poisson**.

1. Quel est le paramètre de cette? Quelles sont les valeurs possibles de la variable ?
2. Quelle est la probabilité d'observer plus de **2** défauts par dalle ?
3. L'entreprise présente à ses clients deux catégories de dalles: celles présentant moins de deux défauts (qualité ***) et celles présentant au moins deux défauts (qualité **). Quelle est la probabilité d'observer au moins deux défauts sur une dalle ? Quelle est alors la proportion de dalles de qualité ** ?
4. Sur **500** dalles contrôlées, quel est le nombre attendu ne présentant aucun défaut ?

Exercice 3

Lois usuelles discrètes:

Bernoulli(p) avec $p \in [0;1]$: $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$.

Binomiale(n,p) avec $n > 0$ et $p \in [0;1]$: $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k = 0, \ldots, n$.

Géométrique(p) avec $p \in [0;1]$: $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$?.

Poisson(λ) avec $\lambda > 0$: $P(X = k) = \exp(-\lambda)\dfrac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

La notion de fonction génératrice peut être utile parfois pour calculer plus facilement les moments de certaines lois de probabilité. Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs entières, soit $D_X = \{0, 1, \ldots\ldots\} = \mathbb{N}$ dont la loi de probabilité est définie par l'ensemble des couples (k, P_k), où $k \in K \subseteq \mathbb{N}$, on peut définir sa fonction génératrice par:

$$G_X(u) = \mathbb{E}(u^X) = \sum_{k\in K} P_k u^k \text{ où } 0 \leq\ u \leq 1.$$

Calculer **la fonction génératrice de** X lorsque X est une variable aléatoire:

1. de loi de **Bernoulli** de paramètre $p \in [0;1]$;
2. de loi **Binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$? et $p \in [0;1]$;
3. de loi de **Poisson** de paramètre $\lambda > 0$;
4. de loi **géométrique** de paramètre $p \in]0;1[$.
5. Dans chacun des cas, déduire l'espérance et la variance de la V.a X .

Exercice 4. **Les Partie 1** et **2** sont indépendantes.

Partie 1

Soit X, Y deux v.a indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

Déterminer la loi conditionnelle de X lorsque la somme $S = X + Y$ a une valeur fixée $S = s$. En déduire l'expression de la fonction de régression de X sur S puis la valeur de $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X/S)]$

Partie 2

Le modèle suivant peut être utilisé pour représenter le nombre de blessés dans les accidents de la circulation au cours d'un **week-end**. Le nombre d'accidents suit une loi de **Poisson** de paramètre λ. Le nombre de blessés par accident, suit une loi de **Poisson** de paramètre m. Le nombre total de blessés est donc:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

S est la somme d'un nombre aléatoire de variables de **Poisson**, indépendantes et de même loi.

1. Donner une expression pour $P(S = s)$.
2. Calculer $P(S = 0)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $V(S)$.

Exercice 5

Un fabricant d'ordinateurs portables souhaite vérifier que la période de garantie qu'il doit associer au disque dur correspond à un nombre pas trop important de retours de ce

composant sous garantie. Des essais en laboratoire ont montrés que la loi suivie par la durée de vie, en année, de ce composant est la loi exponentielle de moyenne **4**.

1. Préciser la fonction de répartition de cette loi ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X)$ et sont écart-type .
2. Quelle est la probabilité qu'un disque dur fonctionne sans défaillance plus de quatre ans?
3. Quelle est la probabilité qu'un disque dur fonctionne sans défaillance six ans au moins, sachant qu'il a fonctionné déja cinq ans.
4. Quelle est la probabilté que la durée de vie appartienne à l'intervalle: $[\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma]$?

5. Pendant combien de temps, 50% des disques durs fonctionnent-ils sans défaillance ?

6. Donner la période de garantie optimum pour remplacer moins de 15% des disques durs sous garantie.

Exercice 6

La distance (en mètres) parcourue par un projectile suit une **loi normale**. Au cours d'un entraînement, on constate que:

• La probabilité qu'un projectile dépasse $\mathbf{60}$ mètres est $\mathbf{0,0869}$.

• La probabilité qu'un projectile parcoure une distance inférieure à $\mathbf{45}$ mètres est $\mathbf{0,6406}$.

Calculer la distance moyenne parcourue par un projectile, ainsi que l'écart-type de celle-ci.

Corrigé de TD 3

Exercice 1

1. La loi de probabilité de la v.a. X:

La v.a. X suit une loi géométrique de paramètre $\mathbf{p} = \mathbf{0,02}$, on écrit $X \rightarrow G(0,02)$, et on a:

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = (0,02)(0,98)^{k-1}; k \in \{1,2,\ldots.\}.$$

2. La probabilité que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au dixième essai:

$$P(X = 10) = (0,02)(0,98)^{10-1} = 0,016.$$

Exercice 2

1. Soit X la variable : « nombre de défauts par dalle ». La loi de X est une loi de Poisson.

Son paramètre est égal à la moyenne observée sur l'échantillon : $\lambda = 1,2$. Les valeurs possibles de X sont les entiers positifs.

2.

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2).$$

Or $P(X = 0) = e^{-1,2}, P(X = 1) = 1,2 \times e^{-1,2}, P(X = 2) = e^{-1,2} \times \dfrac{1,2^2}{2!}$

$$P(X = 0) = 0,301\ , P(X = 1) = 0,361\ , P(X = 2) = 0,217.$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,879 = 0,122$$

3. La probabilité d'observer au moins deux défauts sur une dalle est alors:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - e^{-1,2} - 1,2 \times e^{-1,2} = 0,338.$$

La proportion de dalles de qualité ** est donc $33,8\%$.

4. Sur les 500 dalles contrôlées, le nombre attendu ne présentant aucun défaut est:

$$500 \times P(X = 0) \approx 150.$$

Exercice 3

1. La fonction génératrice des moments d'une v.a. $X \rightarrow B(p)$:

$$\begin{aligned} G_X(u) &= \mathbb{E}(u^X) = \sum_{k=0}^{1} u^k P(X = k) \\ &= (1-p) + up \\ &= (1-p) + pu. \end{aligned}$$

2. La fonction génératrice des moments d'une v.a. $X \rightarrow G(p)$:

$$G_X(u) = \mathbb{E}(u^X) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k P(Y = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} u^k p(1-p)^{k-1} = Pu \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)u)^{k-1}$$
$$= \frac{pu}{1-(1-p)u}.$$

3. La fonction génératrice des moments d'une v.a. $X \to \mathcal{P}(\lambda)$:

$$G_X(u) = \mathbb{E}(u^X) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k P(Y = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} u^k \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{k!} \exp(-\lambda)$$
$$= \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{k!} = \exp(-\lambda) \exp(\lambda u) = \exp \lambda(u-1).$$

4. La fonction génératrice des moments d'une v.a. $X \to \mathcal{B}(n,P)$:

$$G_X(u) = \mathbb{E}(u^X) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k P(Y = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} u^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k (Pu)^k (1-P)^{n-k}$$
$$= (Pu + (1-P))^n = (Pu+q)^n.$$

N.B:

$$G_X(u) = \mathbb{E}(u^X) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k P(Y = k)$$

le développement en série entière de Taylor donne:

$$G_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} u^k.$$

ce qui permet d'obtenir par exemple la loi de probabilité par les relations:

$G_X(0) = P(0)$ et $G_X^{(k)}(0) = k! P(Y = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

5. Déduisons l'espérance et la variance de la V.a X:
Pour

$$u = 1, G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) = \mathbb{E}(X)$$

et

$$G''(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) P(X = k) = \mathbb{E}(X(X-1)).$$

On en déduit que

$$Var(X) = G''(1) + G'(1) - \left(G'(1)\right)^2.$$

Exercice 4
Partie 1

X et Y sont deux **Poissons** indépendantes tels que

$$X \to \mathcal{P}(\lambda) \text{ et } Y \to \mathcal{P}(\mu)$$

Déterminons la loi conditionnelle de $X/S = X + Y$¨?
Nous savons que

$$S \to \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

et par conséquent pour

$$0 \leq x \leq s,\ P(X = x/S = s) = \frac{P(X = x, S = s)}{P(S = s)} = \frac{P(X = x)P(S = s/X = x)}{P(S = s)} = \frac{P(X = x)P(Y = s - x)}{P(S = s)}$$

par calcul on trouve

$$\begin{aligned}\frac{P(X = x)P(Y = s - x)}{P(S = s)} &= \frac{s!}{x!(s - x)!} \times \frac{\lambda^x \mu^{s-x}}{(\lambda + \mu)^s} \\ &= C_s^x \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^{s-x} = C_s^x P^x (1 - P)^{s-x}\end{aligned}$$

On en déduit que $X/S = s \to B\left(s, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$ donc d'espérance

$$\mathbb{E}(X/S = s) = s\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \text{ constant.}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X/S) \text{ est une variable aléatoire}$$

tel que

$$\mathbb{E}(X/S) = S\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \text{ est une variable aléatoire et}$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/S)) = \mathbb{E}\left(S\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\mathbb{E}(S) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \times \lambda + \mu = \lambda.$$

Partie 2

N.**B**: Ce qu'il faut retenir de cet exercice L'application des théorèmes de l'espérance totale et de la variance totale trouve ici tout son sens.

1. Si on connaît le nombre d'accidents du week-end, on peut alors connaître le nombre de blessés dans le week-end en utilisant la somme de variables de Poisson: on va donc utiliser la loi de probabilité conditionnelle:

$$\begin{cases} P(S = s/N = n) = \dfrac{e^{-\mu n}(\mu n)^s}{s!} \Rightarrow P(S = s) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{-\mu n}(\mu n)^s}{s!} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ P(S = s) = \dfrac{e^{-\lambda}\mu^s}{s!} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^n n^s e^{-\mu n}}{n!}. \end{cases}$$

2.

$$P(S = 0) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\mu n}}{n!} = \exp[-\lambda(1 - e^{-\mu})].$$

3.

$$
\begin{cases}
\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(S/N)] \\
\mathbb{E}(S/N = n) = n\mu \Rightarrow \mathbb{E}(S/N) = N\mu \\
\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N\mu) = \mu\mathbb{E}(N) = \mu\lambda \\
V(S) = \mathbb{E}[V(S/N)] + V[\mathbb{E}(S/N)] \\
\mathbb{E}(S/N) = N\mu \text{ et } V(S/N) = N\mu \\
\mathbb{E}[V(S/N)] = \mathbb{E}(N\mu) = \mu\mathbb{E}(N) = \mu\lambda \\
V[\mathbb{E}(S/N)] = V(N\mu) = \mu^2 V(N) = \mu^2\lambda \Rightarrow V(S) = \mu\lambda + \mu^2\lambda = \mu\lambda(1+\mu).
\end{cases}
$$

Exercice 5

1. La loi suivie par la durée de vie, en années, de ce composant est la loi exponentielle de moyenne $\mathbf{4}$. Sa densité est:

$$f(x) = 0,25e^{-0,25x} \text{pour } x \geq 0$$

La durée de vie moyenne est égale à $1/0,25 = 4$ ans et son écart-type est $\sigma = 4$. La fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-0,25x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2.

$$P(X > 4) = 1 - F(4) = exp(-1) = 0,368.$$

3. Par définition d'une probabilité conditionnelle:

$$P(X \geq 6/X > 5) = \frac{P(X \geq 6)}{P(X > 5)} = e^{-0,25(6-5)} = e^{-0,25} = 0,78.$$

Il s'agit d'un phénomène sans mémoire.

4.

$$P[\mathbb{E}(X) - \sigma < X < \mathbb{E}(X) + \sigma] = P(0 < X < 8) = F(8) = 0,865.$$

5. On cherche la durée d durant laquelle 50% des disques durs fonctionnent sans défaillance:

$P(X > d) = 1 - F(d) = 0,5.$ D'où $\exp(-0,25d) = 0,5.$ On obtient $d = 2,77$ ans.

6. On cherche la durée t telle que: $P(X < t) \leq 0,15$. D'où:

$$P(X \geq t) = \exp(-0,25t) = 0,85 \Rightarrow t = -\frac{\ln 0,85}{0,25} \simeq 0,61.$$

Exercice 6

$X \to N(m,\sigma)$.

On cherche à calculer la moyenne m et l'écart-type σ:

$$\text{On pose } Z = \frac{X-m}{\sigma} \to N(0,1).$$

on a

$$\begin{cases} P(X > 60) = 0,0869 \\ P(X < 45) = 0,6406 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\left(Z > \frac{60-m}{\sigma}\right) = 0,0869 \\ P\left(Z < \frac{45-m}{\sigma}\right) = 0,6406 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - P\left(Z \leq \frac{60-m}{\sigma}\right) = 0,0869 \\ \quad = F\left(\frac{60-m}{\sigma}\right) = 0,9131 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{60-m}{\sigma}\right) = 0,9131 \\ F\left(\frac{45-m}{\sigma}\right) = 0,6406 \end{cases}$$

En utilisant la table de la loi normale centrée réduite, on a

$$\begin{cases} \dfrac{60 - m}{\sigma} = 1,36 \\ \dfrac{45 - m}{\sigma} = 0,36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = 15. \\ m = 39,6. \end{cases}$$